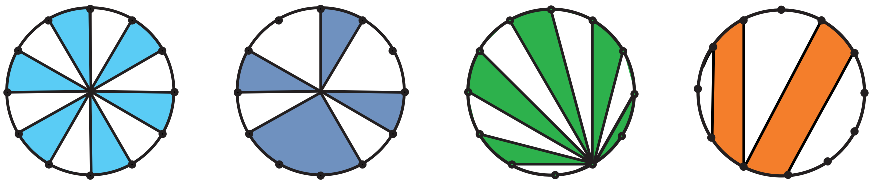


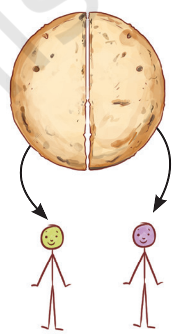
७ भग्नांशाः

0674CH07

स्मरन्तु, यदा केषाञ्चन वस्तूनां सम्पूर्णसंख्याः जनानां मध्ये समानरूपेण विभक्ता सन्ति तदा भग्नांशाः सूचयन्ति तत्र प्रत्येकम् अंशः कियद् भागं वहति इति।

शबनम् - यदि एका रोटिका द्वयोः बालकयोः मध्ये समानरूपेण विभज्यते, तर्हि प्रत्येकशिशुः तस्याः रोटिकायाः कियद्भागं प्राप्स्यति इति स्मर्यते वा?

मुक्ता - प्रत्येकं शिशुः तस्याः रोटिकायाः अर्धभागं प्राप्स्यति।

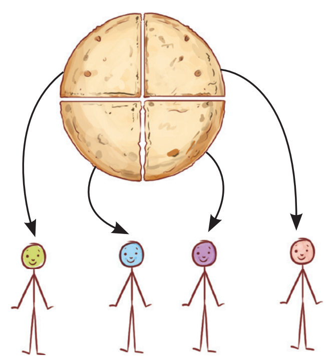


शबनम् - भग्नांशः यथा अर्धभागः (१/२) इत्येवंरूपेण लिख्यते। कदाचिद् वयम् एतद् एक-द्वितीयांशः इत्येवंरूपेणापि उच्यते।

मुक्ता - यदि एका रोटिका चतुर्णां बालकानां मध्ये समानरूपेण विभज्यते, तर्हि प्रत्येकशिशुः तस्याः रोटिकायाः कियद्भागं प्राप्स्यति?

शबनम् - तदा प्रत्येकशिशुः तस्याः रोटिकायाः एक-चतुर्थांशं (१/४) प्राप्स्यति।

मुक्ता - १/२ तथा १/४ इत्येतयोः मध्ये कः अंशः अधिकः अस्ति ?



शबनम् - यदा एका रोटिका द्वयोः बालकयोः मध्ये समानरूपेण विभज्यते, तदा प्रत्येकशिशुः तस्याः रोटिकायाः अर्धभागं प्राप्नोति। किन्तु यदा एका रोटिका चतुर्णां बालकानां मध्ये समानरूपेण विभज्यते, तदा प्रत्येकशिशुः तस्याः रोटिकायाः एक-चतुर्थांशं प्राप्नोति। यतो हि द्वितीयक्षेत्रे अधिकाः बालकाः एकामेव रोटिकां सहभागयन्ति, अतः तत्र

प्रत्येकशिशुः पूर्वस्य अपेक्षया रोटिकायाः क्षुद्रतरभागं प्राप्नोति। तस्माद् $\frac{१}{२}$ इति भागः $\frac{१}{४}$ इति भागस्य अपेक्षया अधिकः अस्ति।

$\frac{१}{२} > \frac{१}{४}$

७.१ भग्नांशाः समभागाश्च

बेनी - एतयोर्मध्ये कः भग्नांशः बृहत्तरः अस्ति $\frac{१}{५}$ अथवा $\frac{१}{९}$?

अरविन्दः - ९ इति अंकः ५ इत्यस्य अपेक्षया बृहत्तरः अस्ति। अतः $\frac{१}{९}$ इति $\frac{१}{५}$ इत्यस्य अपेक्षया बृहत्तरम् अस्ति इत्यहं मन्ये। मम अनुमानं सत्यं वा?

बेनी - न हि ! बहवः जनाः अत्रैव भ्रमं कुर्वन्ति। इदानीम् एतान् भग्नांशान् अंशरूपेण चिन्तयतु।

अरविन्दः - यदा एका रोटिका पञ्चानां बालकानां मध्ये समानरूपेण विभज्यते, तदा प्रत्येकशिशुः तस्याः रोटिकायाः एक-पञ्चमांशं ($\frac{१}{५}$) प्राप्नोति। किन्तु यदा एका रोटिका नवानां बालकानां मध्ये समानरूपेण विभज्यते, तदा प्रत्येकशिशुः तस्याः रोटिकायाः एक-नवमांशं ($\frac{१}{९}$) प्राप्नोति। एवं वा ?

बेनी - आम्, सत्यमेव। इदानीं पुनः चिन्तयित्वा वदतु, एतयोर्मध्ये कः भग्नांशः बृहत्तरः अस्ति $\frac{१}{५}$ उत $\frac{१}{९}$?

अरविन्दः - यदि अहम् अधिकजनैः सह सहभागयामि, तर्हि क्षुद्रतरभागं प्राप्स्यामि। अतः $\frac{१}{९} < \frac{१}{५}$ ।

बेनी - आम्, इदानीं भवान् सम्यग् अवगतवान्।

ओहो, एवं वा? तर्हि $\frac{१}{१००}$ किं $\frac{१}{२००}$ इत्यस्मात् बृहत्तरा अस्ति!

यदा एका पूर्णसंख्या अनेकेषु समभागेषु विभज्यते, तदा प्रत्येकम् अंशः **भग्नांशः** इति उच्यते। अधो दत्ताः सर्वे भग्नांशाः सन्ति -

$$\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५}, \frac{१}{६}, \ldots, \frac{१}{१०}, \ldots, \frac{१}{५०}, \ldots, \frac{१}{१००},$$ इत्यादि।

केचिद् भग्नांशाः **एकक-भग्नांशाः** इति नाम्नापि निर्दिश्यन्ते।

एतत् निश्चिन्वन्तु

भग्नांशैः रिक्तस्थानानि पूरयन्तु।

१. त्रीणि दृढबीजानि सन्ति। तेषां सम्मिलितः भारः भवति १ किलोग्राम इति। यदि तेषाम् आकाराः प्रायः समानाः सन्ति, तर्हि प्रत्येकस्य भारः भवति ________ किलोग्राम ।

२. एकः प्रत्यक्ष-व्यवसायी १ किलोग्राम-भारयुक्तं तण्डुलं समानभारयुक्तेषु चतसृषु सञ्चिकासु पूरितवान्। तर्हि प्रत्येकसञ्चिकायाः भारः भवति ________ किलोग्राम।

३. चत्वारि मित्राणि चषकत्रयपरिमितम् इक्षुरसम् दातुं पृच्छन्ति तथा ते तत् समानरूपेण सहभागयन्ति। तर्हि तेषु प्रत्येकः ________ चषकपरिमितम् इक्षुरसं पीतवान्।

गणित कथा

४.   एकस्य बृहन्मत्स्यस्य भारः $\frac{१}{२}$ किलोग्राम इति अस्ति। लघुमत्स्यस्य भारः $\frac{१}{४}$ किलोग्राम इति अस्ति। तर्हि मिलित्वा तयोः भारः भवति _________ किलोग्राम।

गणित कथा

प्राचीनज्ञानम् !

प्राचीनकालादेव भारते भग्नांशानां व्यवहारः आसीत् तथा तेषां कृते नाम अपि प्राप्यते। यथा, ऋग्वेदे $\frac{३}{४}$ इति भग्नांशः त्रि-पादः इति नाम्ना निर्दिश्यते। आधुनिककालस्य अनेकेषु भारतीयभाषासु अस्य समानार्थकशब्दस्य प्रयोगः दृश्यते। उदाहरणार्थं $\frac{३}{४}$ इति भग्नांशः लौकिक-हिन्दी-भाषायां 'तीन पाव' एवञ्च तामिल-भाषायां 'मुक्काल' इति उच्यते। वस्तुतस्तु, अद्यत्वे भारतीयभाषासु भग्नांशस्य कृते प्रचलिताः शब्दाः प्रायः प्राचीनशब्देभ्यः एव आगताः।

भवतां गृहे, नगरे, राज्ये च भग्नांशानां कृते ये शब्दाः प्रयुज्यन्ते, तान् अन्विष्य तेषां विषये चर्चां कुर्वन्तु। स्वस्य पितामही-पितामहौ, मातापितरौ, शिक्षकान् सहपाठिनश्च पृच्छन्तु यत् ते भग्नांशानां कृते केषां भिन्नभिन्नशब्दानाम् उपयोगं कुर्वन्ति। यथा, सार्धैकम् इति, तिन-चतुर्थांशः इति, एक-चतुर्थांशः इति, अर्धम् इति, चतुर्थांशः इति, सार्ध-द्वे इत्यादि। तान् शब्दान् अत्र लिखन्तु।

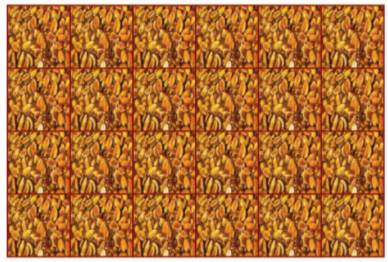
_____________ _____________ _____________ _____________ _____________

५.   अधः रिक्तपेटिकायां एतान् भग्नांशान् आरोहणक्रमेण लिखन्तु -
सार्धैकम्, त्रि-चतुर्थांशः, एक-चतुर्थांशः, अर्धम्, चतुर्थांशः, सार्ध-द्वे॥

अत्र भवताम् उत्तरं लिखन्तु

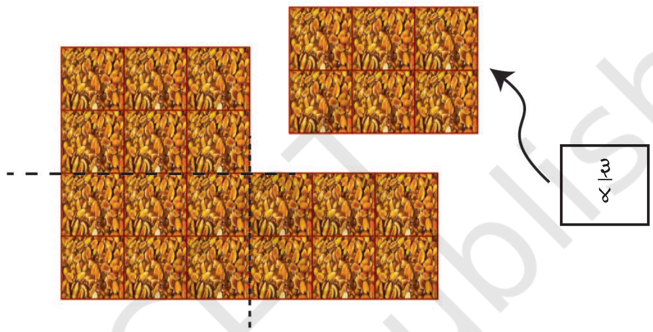
७.२ पूर्णस्य अंशरूपेण भग्नांशस्य स्वरूपम्

चित्रमिदं पूर्णतया एकां चिक्कीं दर्शयति।

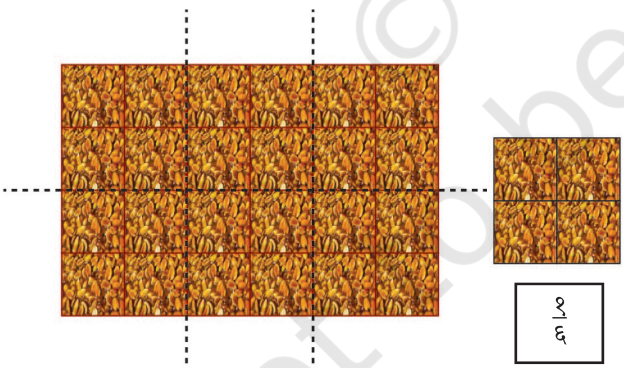


एका सम्पूर्णा *चिक्की*

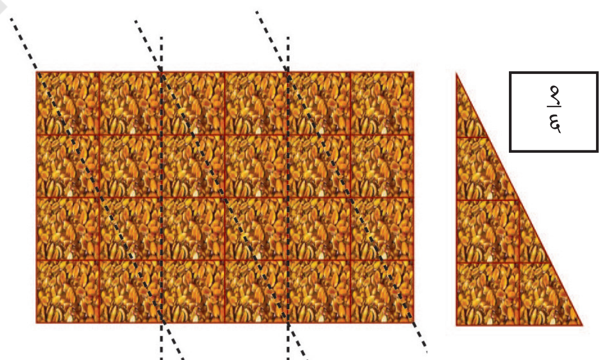
द्वयोः खण्डयोः विभक्तस्य चिक्की इत्यस्य चित्रम् अधः दर्शितम् अस्ति। तत्र प्रत्येकस्मिन् खण्डे कियत्परिमाणं चिक्की अस्ति ?



अत्र बृहत्तरखण्डे $\frac{१}{४}$ इति परिमाणविशिष्टाः त्रयः चिक्कीखण्डाः सन्ति इति वयं पश्यामः। अतः, वयं $\frac{१}{४}$ इति एकक-भग्नांशम् उपयुज्य बृहत्तरचिक्कीखण्डं मापयितुं शक्नुमः। तदा वयं पश्यामः यद् बृहत्तर-चिक्की-खण्डस्य परिमाणम् $\frac{३}{४}$ (त्रि-चतुर्थांशः) इति अस्ति।



एका सम्पूर्णा *चिक्की*। षट्सु समानेषु खण्डेषु कर्तयतु।

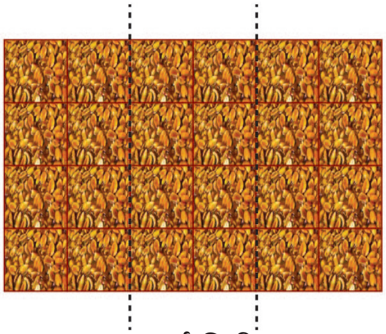


एका सम्पूर्णा *चिक्की*। भिन्नेन उपायेन एताम् अपि षट्सु समान-खण्डेषु कर्तयतु।

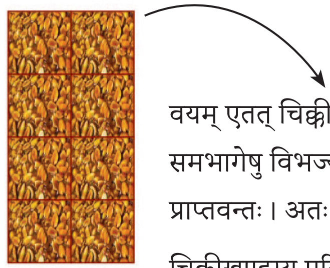
अत्र सम्पूर्णचिक्कीखण्डं षट्सु समभागेषु भिन्नभिन्नरूपेण विभज्य वयं भिन्नाकाराणां षोडशखण्डान् प्राप्नुमः। तेषाम् आकारः समानः अस्ति वा?

गणित कथा

अधः दर्शितस्य चिक्कीखण्डस्य भग्नांश-परिमाणं किम् अस्ति ?



एका सम्पूर्णा *चिक्की*



$\boxed{\frac{१}{३}}$

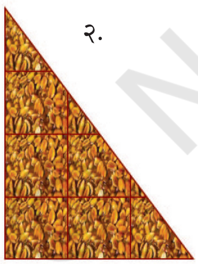
वयम् एतत् चिक्कीखण्डं त्रिषु समभागेषु विभज्य एतं खण्डं प्राप्तवन्तः। अतः अस्य चिक्कीखण्डस्य परिमाणमस्ति $\frac{१}{३}$ (एक-तृतीयांशः)।

एतत् निश्चिन्वन्तु

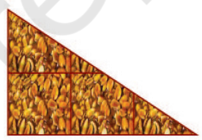
अधो दत्तांकाः सम्पूर्णचिक्कीखण्डस्य भिन्न-भिन्न-भग्नांशान् दर्शयन्ति। तर्हि प्रत्येकस्मिन् खण्डे कियत्परिमाणम् अस्ति?

१.

२.

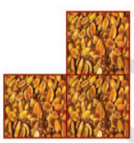


३.



४.

५.



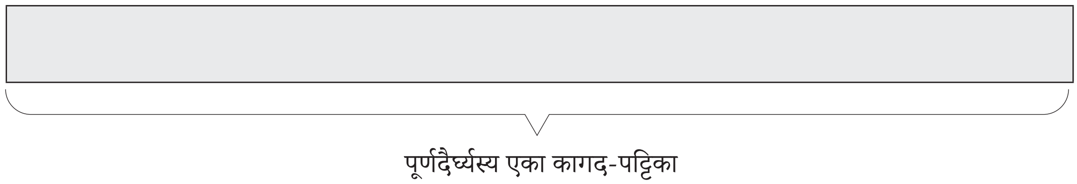
६.

७.

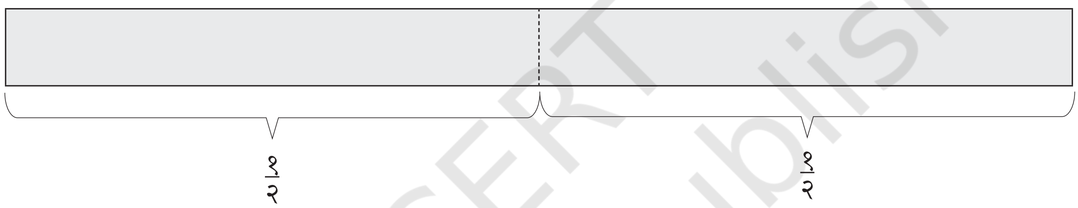
८.

७.३ भग्नांशस्य उपयोगेन परिमाणनिर्णयः

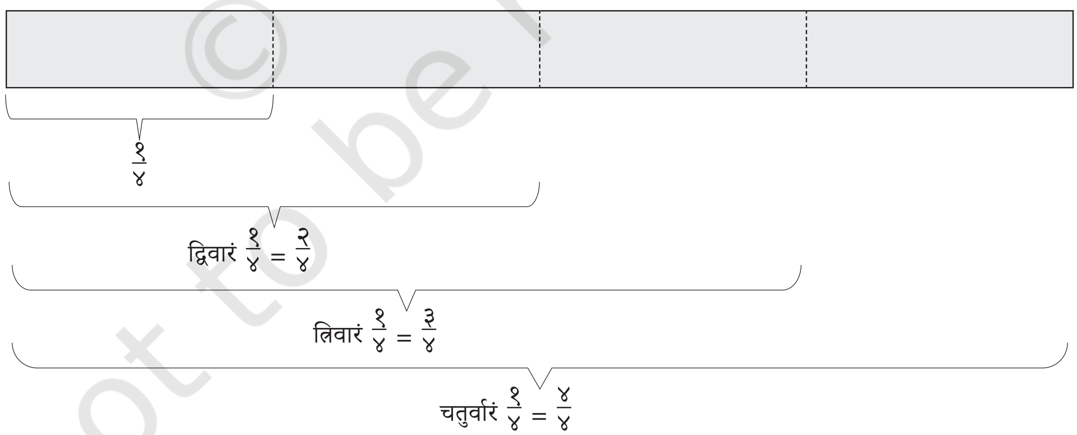
एकां कर्गदपट्टिकां स्वीकुर्वन्तु। वयम् एतत् पूर्णदैर्घ्यस्य पट्टिका (१) इति स्वीकुर्मः।



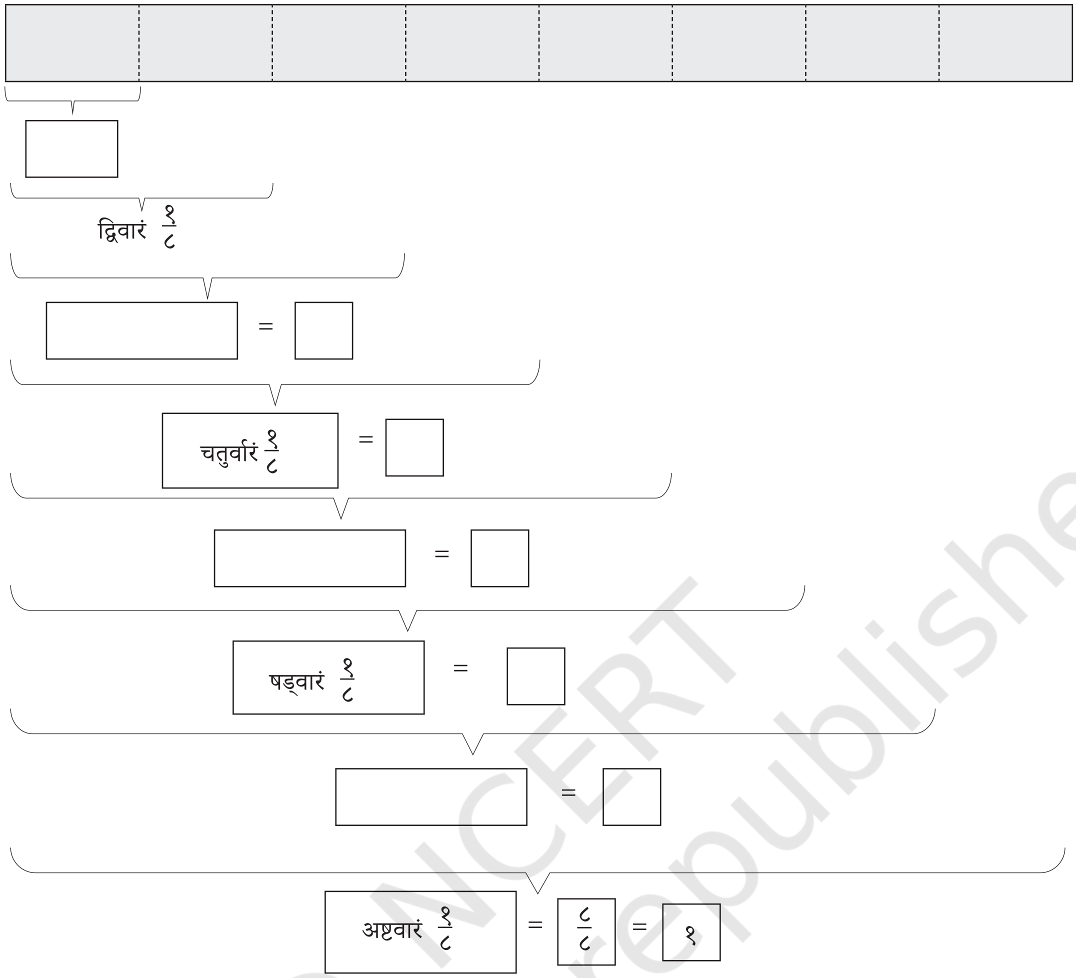
इदानीं तां पट्टिकां द्वयोः समभागयोः विभज्य पुटीकुर्वन्तु । ततः पुटं पुनः उद्घाटयन्तु। यदि पट्टिकायाः दैर्घ्यः १ इति स्वीकुर्मः, तर्हि रेखाम् आश्रित्य (यथा चित्रे दर्शितम्) अस्याः पट्टिकायाः द्वयोः नवीनभागयोः दैर्घ्यः कियद् भवति?



यदि भवन्तः पूर्वम् पुटीकृतां पट्टिकां पुनः द्वयोः समभागयोः विभाजयन्ति, तर्हि किं प्राप्स्यन्ति ? इदानीं भवन्तः चतुरः समानभागान् प्राप्स्यन्ति।



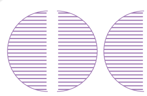
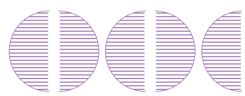
एतत् पुनरेकवारं कुर्वन्तु। रिक्तपेटिकाः पूरयन्तु।



भग्नांशपरिमाणानि भग्नांश-एककानाम् उपयोगेन मापयितुं शक्यन्ते।

अन्यदेकम् उदाहरणं पश्यामः।


एतद् पूर्ण-रोटिकां सूचयति (पूर्णः अंशः)

				
$\frac{१}{२}$ = एकार्धः	$\frac{१}{२}+\frac{१}{२}$ = अर्धद्वयम्	$\frac{१}{२}+\frac{१}{२}+\frac{१}{२}$ = अर्धत्रयम्	$\frac{१}{२}+\frac{१}{२}+\frac{१}{२}+\frac{१}{२}$ = अर्धचतुष्टयम्	$\frac{१}{२}+\frac{१}{२}+\frac{१}{२}+\frac{१}{२}+\frac{१}{२}$ = अर्धपञ्चकम्

भग्नांश-एककानि सङ्गृह्य आहत्य कियत् परिमाणम् अस्ति इति वर्णयितुं शक्नुमः।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. $\frac{१}{२}$ इति भग्नांश-एककस्य साहाय्येन इमां सारणीम् इतोऽपि सोपानद्वयम् अग्रे अनुवर्तयन्तु।

२. $\frac{१}{४}$ इति भग्नांश-एककस्य साहाय्येन एतादृशीं सारणीं निर्मातुं शक्यते वा ?

३. कर्गदपट्टिकाम् उपयुज्य $\frac{१}{३}$ इत्यस्य कृते सारणीं निर्मान्तु। $\frac{१}{६}$ इत्यस्य कृते अपि एतादृशीं सारणीं निर्मातुं शक्यते वा ?

४. चित्रम् अङ्कयित्वा उपरि इव विवरणं योजयन्तु।

(क) रोटिकायाः चतुर्थांश-पञ्चकम् (ख) रोटिकायाः चतुर्थांश-नवकम्

५. प्रत्येकं भग्नांश-एककं समुचितचित्रेण सह मेलयन्तु।

$\frac{१}{३}$ $\frac{१}{५}$ $\frac{१}{८}$ $\frac{१}{६}$

भग्नांशानाम् अध्ययनम्

वयं सामान्यतया $\frac{३}{४}$ इति भग्नांशं 'त्रि-चतुर्थांशः' अथवा '३ अंशः ४ हरः' इत्येवंरूपेण पठामः। परन्तु '३ गुणितं $\frac{१}{४}$ इत्येवंरूपेण पठनेन भग्नांशस्य आकारस्य सहजतया ज्ञानं भवति, यतो हि एतत् स्पष्टतया दर्शयति यद् $\frac{१}{४}$ इति भग्नांश-एककम् कियत्परिमाणमस्ति तथा तत्र एतादृशानि कति (३) भग्नांश-एककानि सन्ति।

भग्नांशस्य उपरि स्थिता संख्या केन नाम्ना उच्यते तथा अधः स्थिता संख्या केन नाम्ना उच्यते इति स्मर्यते वा ? $\frac{५}{६}$ इति भग्नांशे ५ **अंशः** इति, ६ इति संख्या **हरः** इति उच्येते।

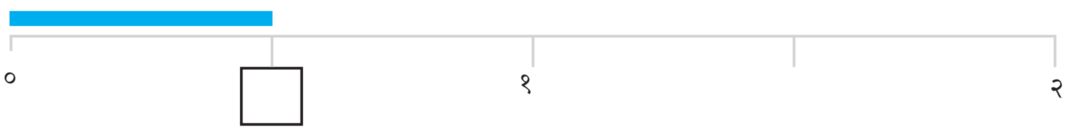
शिक्षकान् प्रति

वृत्तं, वर्गक्षेत्रम्, आयतक्षेत्रं, त्रिभुजः इत्यादि-भिन्नभिन्नाकाराणां साहाय्येन भग्नांश-एककानि अन्वेष्टुं बालकेभ्यः अनेकानि अवसराणि प्रयच्छन्तु।

७.४ संख्यारेखायाः साहाय्येन भग्नांशस्य परिमाणनिर्णयः

भवन्तः एकस्यां संख्यारेखायां १,२,३ ..... इत्यादिपूर्णसंख्याः दर्शयितुं शिक्षितवन्तः। किं भवन्तः भग्नांशानपि संख्यारेखायाः साहाय्येन दर्शयितुं शक्नुवन्ति ?

अत्र नीलरेखायाः दैर्घ्यः कियदस्ति ? अधो दत्तपेटिकायां भग्नांशाकारेण अस्याः दैर्घ्यं लिखन्तु।

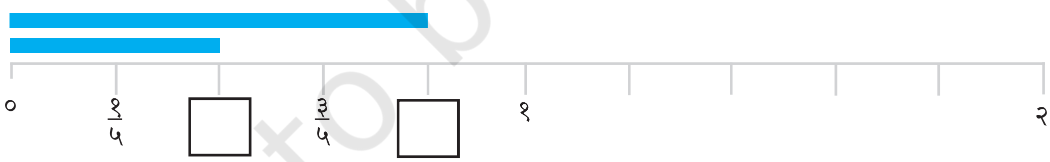


०,१ इत्येतयोर्मध्ये व्यवधानं १ इति। यदि एतद् दूरत्वं द्वयोः समभागयोः विभज्यते, तर्हि प्रत्येकस्य भागस्य दैर्घ्यः भवति $\frac{१}{२}$ इति। अतः अत्र नीलरेखायाः दैर्घ्यः भवति $\frac{१}{२}$ इति।

अधुना किं भवन्तः अधः दर्शितानां नीलरेखानां दैर्घ्यं निर्णेतुं शक्नुवन्ति ? अधो दत्ताः रिक्तपेटिकाः पूरयन्तु।

१. ०, १ इत्येतयोर्मध्ये दूरत्वम् अस्ति १ इति। एतद् दूरत्वं वयं त्रिषु समभागेषु विभाजयामः। तर्हि स्वस्य टिप्पणीपुस्तिकायां रिक्तपेटिकायां वा भग्नांशाकारेण नील-रेखायाः दैर्घ्यं लिखन्तु।

२. अत्र, एकः दैर्घ्यः पञ्चसमभागेषु विभज्यते। स्वस्य टिप्पणीपुस्तिकायां रिक्तपेटिकासु वा भग्नांशाकारेण नील-रेखानां दैर्घ्यं लिखन्तु।



३. इदानीम्, एकः दैर्घ्यः अष्टसमभागेषु विभज्यते। स्वस्य टिप्पणीपुस्तिकायां भग्नांशाकारेण अस्य खण्डानाम् उपयुक्तदैर्घ्यं लिखन्तु।

एतत् निश्चिन्वन्तु

गणित कथा

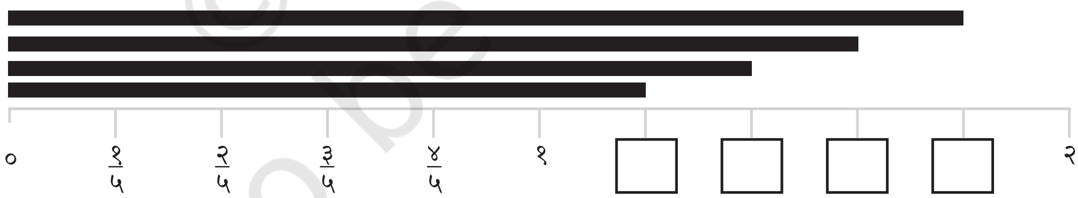
१. संख्यारेखायाः साहाय्येन १/१०, ३/१०, ४/५ इति भग्नांशान् दर्शयन्तु।

२. यथेच्छम् अन्यानि पञ्च भग्नांशानि लिखित्वा संख्यारेखायाः साहाय्येन तानि चिह्नयन्तु।

३. ०, १ इत्येतयोः मध्ये कति भग्नांशानि भवितुम् अर्हन्ति? चिन्तयन्तु तथा सहपाठिभिः सह चर्चां कृत्वा स्वस्य उत्तरं लिखन्तु।

४. अधः दर्शितायाः नीलरेखायाः कृष्णरेखायाश्च दैर्घ्यः कियदस्ति? ०, १ इत्येतयोर्मध्ये दूरत्वम् अस्ति १ इति। इदानीम् एषः दैर्घ्यः द्वयोः समभागयोः विभज्यते। तदा प्रत्येकस्य भागस्य दैर्घ्यः भवति १/२ इति। अतः नीलरेखायाः दैर्घ्यः भवति १/२ इति। अधुना भग्नांशाकारेण रिक्तपेटिकायां कृष्ण-रेखायाः दैर्घ्यं लिखन्तु।

५. रिक्तपेटिकासु भग्नांशाकारेण कृष्ण-रेखानां दैर्घ्यं लिखन्तु।



शिक्षकान् प्रति

श्यामपट्टे एताः रेखाः अङ्कयित्वा छात्रान् पृच्छन्तु यत् ते स्वटिप्पणीपुस्तिकायाम् एतेषां उत्तराणि लिखन्तु।

७.५ मिश्रित - खण्डाः

एकस्य अपेक्षया बृहत्तराः भग्नांशाः।

पूर्वं भवन्तः संख्यारेखायाः साहाय्येन भग्नांशानि चिह्नितवन्तः। तत्र किं भवन्तः लक्षितवन्तः यत् सर्वेषां नीलरेखानां दैर्घ्यः एकस्य अपेक्षया न्यूनम् अस्ति इति तथा सर्वेषां कृष्णरेखानां दैर्घ्यः एकापेक्षया अधिकः अस्ति?

संख्यारेखायां भवन्तः यानि भग्नांशानि पूर्वं चिह्नितवन्तः, तानि सर्वाणि अत्र लिखन्तु।

इदानीं तानि सर्वाणि वयं द्वयोः समूहयोः वर्गीकुर्मः -

१ एककात् दैर्घ्यात् न्यूनः	१ एककात् दैर्घ्यात् अधिकः

तत्र १ इत्यस्य अपेक्षया बृहत्तरभग्नांशानां मध्ये काऽपि समानता अस्ति इति भवन्तः लक्षितवन्तः वा ?

पश्यन्तु, यानि भग्नांशानि एकस्य अपेक्षया क्षुद्रतराणि सन्ति, तेषु सर्वेषु अंशः (उपरि स्थितः अंकः) इति हरः (अधः स्थितः अंकः) इत्यस्य अपेक्षया क्षुद्रतरम् अस्ति। तथैव यानि भग्नांशानि एकस्य अपेक्षया बृहत्तराणि सन्ति, तेषु सर्वेषु अंशः (उपरि स्थितः अंकः) इति हरः (अधः स्थितः अंकः) इत्यस्य अपेक्षया बृगत्तरम् अस्ति।

वयं जानीमः यत् $\frac{३}{२}$, $\frac{५}{२}$, $\frac{७}{२}$ इत्यादिभग्नांशानि अन्योन्यापेक्षया बृहत्तराणि सन्ति। किन्तु तत्र कति पूर्णसंख्याः सन्ति इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा ?

$$\frac{३}{२} = \frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} = १ + \frac{१}{२}$$

$$\frac{५}{२} = \frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} = २ + \frac{१}{२}$$

अहं जानामि यत् $\frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३} = १$। यदि तत्र एकेन सह पुनः $\frac{१}{३}$ इति योजयामि, तर्हि अहम् एकस्य अपेक्षया अधिकम् अंकं प्राप्नोमि! अतः, $\frac{४}{३} > १$।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. $\frac{७}{२}$ इत्यत्र कति पूर्णसंख्याः सन्ति ?

२. $\frac{४}{३}$ एवञ्च $\frac{७}{३}$ इत्यत्र कति पूर्णसंख्याः सन्ति ?

गणित कथा

एकस्य अपेक्षया बृहत्तरभग्नांशानि मिश्रसंख्याकारेण प्रकाशयन्तु ।

वयं दृष्टवन्तः यत् $\frac{३}{२} = १ + \frac{१}{२}$

तथैव अन्यानि भग्नांशानि अपि वयं एतादृशरूपेण लिखितुं शक्नुमः । उदाहरणार्थम्,

$$\frac{४}{३} = \underbrace{\frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३}}_{३ \times \frac{१}{३} = १} + \frac{१}{३} = १ + \frac{१}{३}$$

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. एतेषु भग्नांशेषु कति पूर्णसंख्याः सन्ति, तद् अभिजानन्तु ।

क. $\frac{८}{३}$ ख. $\frac{११}{५}$ ग. $\frac{९}{४}$

वयं दृष्टवन्तः यत् -

$$\frac{८}{३} = २ + \frac{२}{३}$$

भग्नांशः मिश्रसंख्या

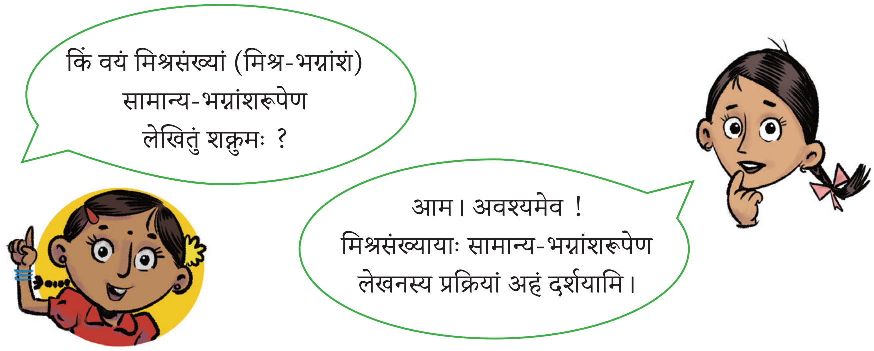
इयं मिश्रसंख्या २ पूर्णः $\frac{२}{३}$ अधिकः इत्येवंरूपेण वक्तुं शक्यते । अपि च एतद् वयं २ $\frac{२}{३}$ इत्येवंरूपेण लिखामः ।

२. किम् एकस्य अपेक्षया बृहत्तराणि सर्वाणि भग्नांशानि मिश्रसंख्याकारेण प्रकाशयितुं शक्यते ?

मिश्र-संख्यायाम् अथवा **मिश्र-भग्नांशे** एका पूर्णसंख्या (पूर्णः अंशः) तथा च एकः भग्नांशः (एकस्य अपेक्षया न्यूनः अंशः) स्तः ।

३. अधः दत्तानि भग्नांशानि मिश्रसंख्याकारेण प्रकाशयन्तु । (यथा, $\frac{९}{२} = ४ - \frac{१}{२}$)

क. $\frac{९}{२}$ ख. $\frac{९}{५}$ ग. $\frac{२१}{११}$ घ. $\frac{४७}{९}$ ङ. $\frac{१२}{११}$ च. $\frac{१९}{६}$



जया : $३ + \frac{३}{४}$ इत्यस्य अर्थः अस्ति $१ + १ + १ + \frac{३}{४}$ । अहं जानामि यत् -

$$१ = \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४}$$

अतः अहं प्राप्नोमि -

$$\left(\frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४}\right) + \left(\frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४}\right) + \left(\frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४}\right) + \left(\frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४}\right) = \frac{१५}{४}$$

अतः $\left(४ \times \frac{१}{४}\right) + \left(४ \times \frac{१}{४}\right) + \left(४ \times \frac{१}{४}\right) + \left(३ \times \frac{१}{४}\right) = \frac{१५}{४}$

एतत् निश्चिन्वन्तु

एताः मिश्रसंख्याः सामान्यभग्नांशाकारेण प्रकाशयन्तु।

क. $३\frac{१}{४}$ ख. $७\frac{२}{३}$ ग. $९\frac{४}{९}$

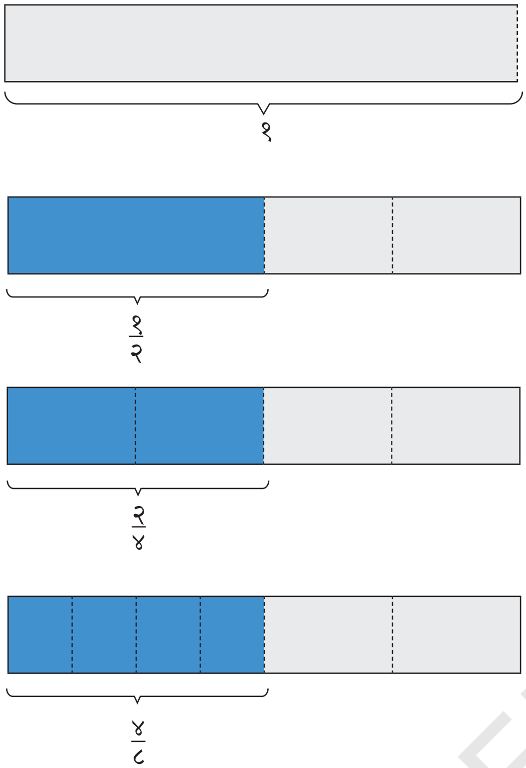
घ. $३\frac{१}{६}$ ङ. $२\frac{३}{११}$ च. $३\frac{९}{१०}$

गणित कथा

७.६ तुल्य - भग्नांशाः

भग्नांशप्राचीरस्य माध्यमेन तुल्य-भग्नांशानां निर्णयः!

पूर्वस्मिन् प्रकरणे कर्गदपुटानि उपयुज्य भग्नांशानां माध्यमेन भवन्तः एकस्य वस्तुनः विभिन्नभागान् दर्शितवन्तः। तस्यैव कर्गदपुटस्य उपयोगेन इदानीम् अन्यानि कानिचन कार्याणि कुर्मः।



भवन्तः/भवत्यः किम् अवलोकयन्ति ?

$\frac{१}{२}$ तथा $\frac{२}{४}$ इति दैर्घ्यौ समानौ वा ?

$\frac{२}{४}$ तथा $\frac{४}{८}$ इति दैर्घ्यौ समानौ वा ?

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः $\frac{१}{२} = \frac{२}{४} = \frac{४}{८}$

एते सर्वे तुल्य-भग्नांशाः सन्ति, ये समानदैर्घ्यं सूचयन्ति। किन्तु वयं तान् भिन्नभिन्न-भग्नांश-एककाकारेण प्रकाशयामः।

इदानीं कर्गदपट्टिकाम् उपयुज्य $\frac{१}{३}$ तथा $\frac{२}{६}$ इति द्वौ तुल्य-भग्नांशौ स्तः, न वा इति परीक्षणं कुर्वन्तु।

अधः दर्शितचित्रे याः पट्टिकाः दत्ताः सन्ति, तेषाम् उपयोगेन स्वयमेव भग्नांशप्राचीरं निर्मान्तु।

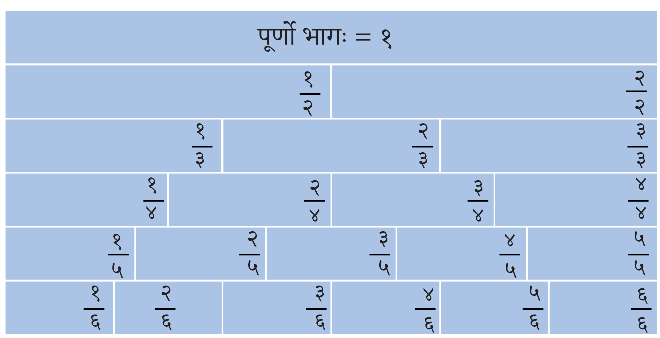
अधः दर्शितं भग्नांशप्राचीरं दृष्ट्वा निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं यच्छन्तु।

१. $\frac{१}{२}$ तथा $\frac{३}{६}$ इत्येतयोः दैर्घ्यौ समानौ वा?

२. $\frac{२}{३}$ तथा $\frac{४}{६}$ इति तुल्य-भग्नांशौ वा?

३. $\frac{१}{२}$ इति संख्यायां $\frac{१}{६}$ इति अंशः कतिवारम् अस्ति?

४. $\frac{१}{३}$ इति संख्यायां $\frac{१}{६}$ इति अंशः कतिवारम् अस्ति?



वयं $\frac{१}{१०}$ इति संख्यां यावद् एकं भग्नांश-प्राचीरं निर्मातुं शक्नुमः। (अयं भग्नांश-प्राचीरः अस्य पुस्तकस्य अन्ते दत्तः अस्ति।)

पूर्णः भागः = १									
$\frac{१}{२}$	$\frac{२}{२}$								
$\frac{१}{३}$	$\frac{२}{३}$	$\frac{३}{३}$							
$\frac{१}{४}$	$\frac{२}{४}$	$\frac{३}{४}$	$\frac{४}{४}$						
$\frac{१}{५}$	$\frac{२}{५}$	$\frac{३}{५}$	$\frac{४}{५}$	$\frac{५}{५}$					
$\frac{१}{६}$	$\frac{२}{६}$	$\frac{३}{६}$	$\frac{४}{६}$	$\frac{५}{६}$	$\frac{६}{६}$				
$\frac{१}{७}$	$\frac{२}{७}$	$\frac{३}{७}$	$\frac{४}{७}$	$\frac{५}{७}$	$\frac{६}{७}$	$\frac{७}{७}$			
$\frac{१}{८}$	$\frac{२}{८}$	$\frac{३}{८}$	$\frac{४}{८}$	$\frac{५}{८}$	$\frac{६}{८}$	$\frac{७}{८}$	$\frac{८}{८}$		
$\frac{१}{९}$	$\frac{२}{९}$	$\frac{३}{९}$	$\frac{४}{९}$	$\frac{५}{९}$	$\frac{६}{९}$	$\frac{७}{९}$	$\frac{८}{९}$	$\frac{९}{९}$	
$\frac{१}{१०}$	$\frac{२}{१०}$	$\frac{३}{१०}$	$\frac{४}{१०}$	$\frac{५}{१०}$	$\frac{६}{१०}$	$\frac{७}{१०}$	$\frac{८}{१०}$	$\frac{९}{१०}$	$\frac{१०}{१०}$

एतत् निश्चिन्वन्तु

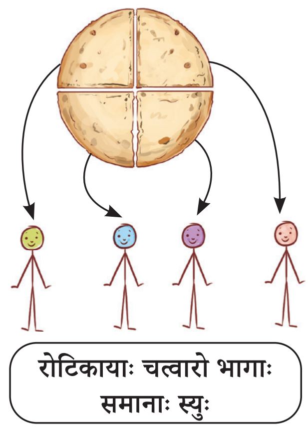
१. $\frac{३}{६}$, $\frac{४}{८}$, $\frac{५}{१०}$ इत्येते तुल्य-भग्नांशाः सन्ति वा ? किमर्थम् ?

२. $\frac{२}{६}$ इत्यस्य कृते द्वौ तुल्य-भग्नांशौ लिखन्तु।

३. $\frac{४}{६} = \boxed{\frac{\;}{\;}} = \boxed{\frac{\;}{\;}} = \boxed{\frac{\;}{\;}} =$ .... (यावत्यः संख्याः लेखितुं शक्यते, तावतीः लिखन्तु।)

समांशानाम् उपयोगेन तुल्य-भग्नांशानाम् अवगमनम्।

एका रोटिका चतुर्षु बालकेषु समभागेन विभज्यते।
तर्हि प्रत्येकः बालकः रोटिकायाः कियदंशं प्राप्तवान् ?
इदं चित्रं चतुर्षु बालकेषु रोटिकायाः विभाजनं दर्शयति।
तदा प्रत्येकेन बालकेन रोटिकायाः प्राप्तांशः - १/४



वयम् विभाजनपद्धत्या, संयोजनपद्धत्या, गुणनपद्धत्या वा एतद् प्रकाशयितुं शक्नुमः। यथा -

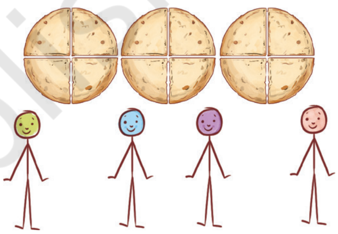
विभाजनपद्धतिः = $१ \div ४ = \frac{१}{४}$

संयोजनपद्धतिः = $\frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४}$

गुणनपद्धतिः = $४ \times \frac{१}{४}$

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. तिस्रः रोटिकाः चतुर्षु बालकेषु समभागेन विभज्यन्ते। तर्हि अत्र विभाजनं कथं स्यात् इति अनेन चित्रेण दर्शयन्तु। तत्र प्रत्येकः बालकः रोटिकायाः कियदंशं प्राप्नोति इति लिखन्तु। अपि च विभाजनपद्धत्या, संयोजनपद्धत्या, गुणनपद्धत्या च तद् भग्नांशं प्रकाशयन्तु।



अतः प्रत्येकेन बालकेन रोटिकायाः प्राप्तांशः _____

विभाजनपद्धतिः =

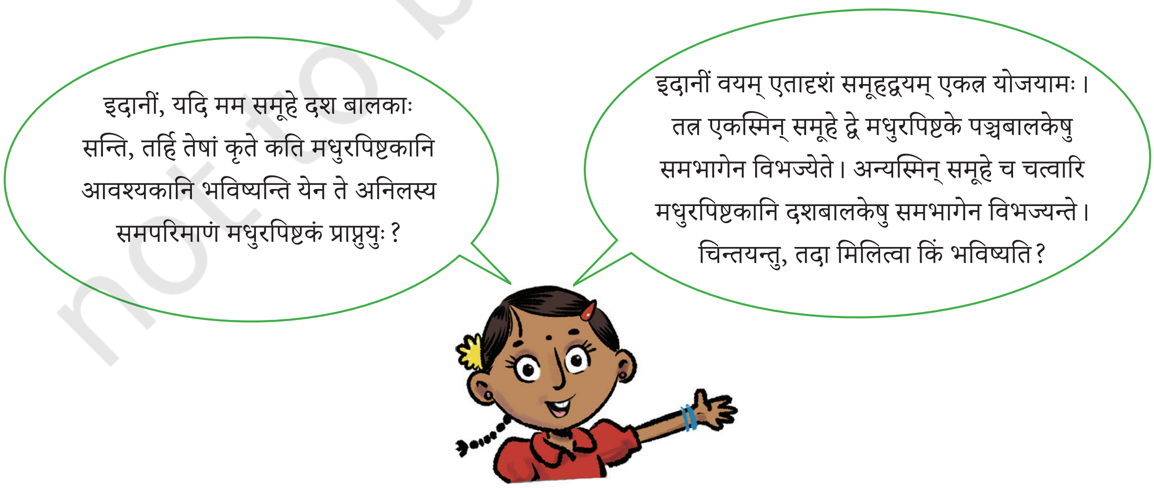
संयोजनपद्धतिः =

गुणनपद्धतिः =

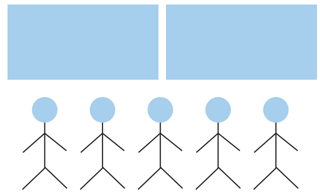
इमानि चित्राणि भवताम् उत्तराणि च भवतां कक्षायाः सहपाठिभिः सह आलोचयन्तु।

२. यदा द्वे रोटिके चतुर्षु बालकेषु समभागेन विभज्येते, तदा प्रत्येकः बालकः रोटिकायाः कियदंशं प्राप्नोति इति चित्रमाध्यमेन दर्शयन्तु।

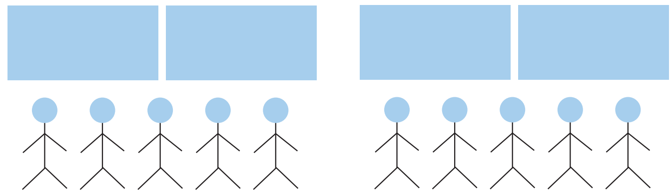
३. द्वे मधुरपिष्टके पञ्चबालकेषु समभागेन विभज्येते। अनिलः बालकानां तस्मिन् दले अस्ति। तर्हि सः मधुरपिष्टकस्य कियदंशं प्राप्स्यति ?



प्रथमः समूहः



द्वितीयः समूहः



अत्र उभयपरिस्थितौ प्रत्येकेन बालकेन प्राप्तांशस्य परिमाणं समानमेव!

अतः, $\frac{२}{५} = \frac{४}{१०}$!

निम्नलिखितपरिस्थितिषु प्रत्येकेन बालकेन प्राप्तांशस्य परिमाणस्य विषये विचारयामः।

- एका रोटिका द्वयोः बालकयोः मध्ये समभागेन विभज्यते।
- द्वे रोटिके चतुर्षु बालकेषु समभागेन विभज्येते।
- तिस्रः रोटिकाः षट्सु बालकेषु समभागेन विभज्यन्ते।

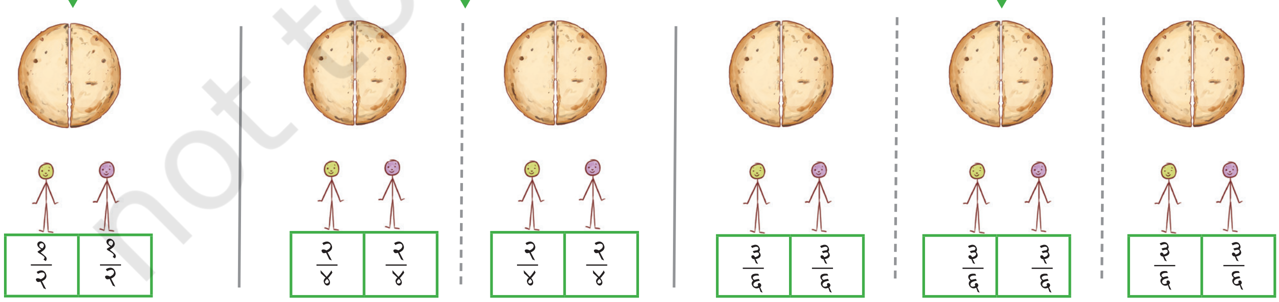
एहि, वयम् अङ्कयामः, सहभागयामश्च!

किं भवन्तः लक्षितवन्तः यद् अत्र प्रत्येकपरिस्थितौ प्रत्येकेन बालकेन प्राप्तांशस्य परिमाणं समानमेव। अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $\frac{१}{२} = \frac{२}{४} = \frac{३}{६}$

एका रोटिका द्वयोः बालकयोः मध्ये समभागेन विभज्यते

द्वे रोटिके चतुर्षु बालकेषु समभागेन विभज्येते

तिस्रः रोटिकाः षट्सु बालकेषु समभागेन विभज्यन्ते

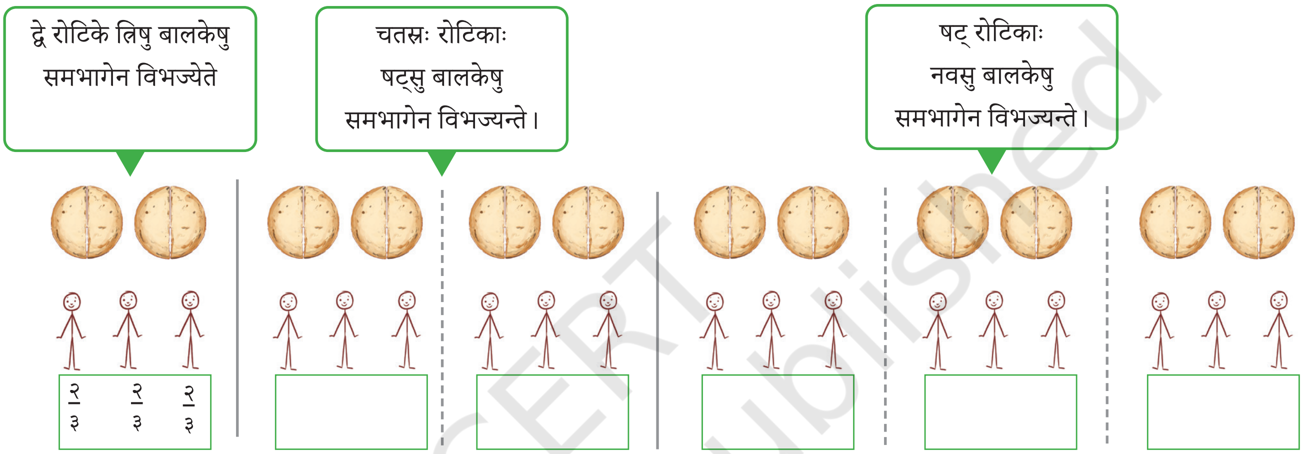


भग्नांशाः यत्र समानरूपेण विभक्ताः भवन्ति, तद्धि 'तुल्य-भग्नांशाः' इति कथ्यन्ते।

अतः, $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{४}$, $\frac{३}{६}$ इत्येते तुल्य-भग्नांशाः सन्ति।

$\frac{१}{२}$ इत्यस्य अन्ये केचन तुल्य-भग्नांशाः अन्विष्यन्ताम्। एतासु रिक्तपेटिकासु तान् भग्नांशान् लिखन्तु। ☐ ☐ ☐ ☐

निम्नलिखितपरिस्थितीनां दृष्ट्या रोटिकाः समभागेन विभज्यन्तां तथा प्रत्येकः बालकः तस्याः कियदंशं प्राप्नोति इति लिख्यताम्। किम् एतेषु सर्वेषु स्थितिषु प्राप्तांशस्य परिमाणं समानम् अस्ति? किमर्थम्?



$\frac{४}{६}$ इति भग्नांशस्य सरलतमरूपम् अस्ति $\frac{२}{३}$ इति। तथैव $\frac{६}{९}$ इत्यस्यापि सरलतमरूपम् अस्ति $\frac{२}{३}$ इति।

एतत् निश्चिन्वन्तु

किं भवन्तः प्रत्येकस्मिन् भग्नांशे अंश-हरयोर्मध्ये किमपि सम्बन्धं परिलक्षयितुम् अर्हन्ति ?

अत्र अनुपस्थिताः संख्याः अन्विषन्तु।

क. पञ्चचषकपरिमितं फलरसं चतुर्षु मित्रेषु समभागेन विभज्यते। तर्हि अष्टसु मित्रेषु समभागेन विभाजयितुं कियत्परिमाणं फलरसम् आवश्यकम् अस्ति, येन तत्परिमाणं पूर्वस्य समानम् भवति?

अतः, $\frac{५}{४} = \frac{\square}{८}$

गणित कथा

ख. ४ केजी-परिमितम् आलुकं त्रिषु स्यूतेषु समभागेन विभज्यते। तर्हि १२ केजी-परिमितम् आलुकं समभागेन विभाजयितुं कति स्यूतानि आवश्यकानि सन्ति, येन तत् परिमाणं पूर्वस्य समानम् भवति?

अतः, $\frac{४}{३} = \frac{१२}{\square}$

ग. सप्त रोटिकाः पञ्चसु बालकेषु समभागेन विभज्यन्ते = ________ रोटिकाः ________ बालकेषु समभागेन विभज्यन्ते।

अतः, $\frac{७}{५} = \frac{\square}{\square}$

कस्मिन् समूहे प्रत्येकः बालकः अधिकपरिमाणं चिक्कीखण्डं प्राप्स्यति?

एकः चिक्कीखण्डः द्वयोः बालकयोः मध्ये समभागेन विभज्यते। अथवा पञ्च चिक्कीखण्डाः अष्टसु बालकेषु समभागेन विभज्यन्ते।

मुक्ता - तर्हि $\frac{१}{२}$ तथा $\frac{५}{८}$ इति भग्नांशयोः तुलना करणीया। तयोर्मध्ये कः बृहत्तरः अस्ति ?

शवनम् - अस्तु, वयं दृष्टवन्तः यत् $\frac{१}{२} = \frac{४}{८}$ एवञ्च $\frac{४}{८} < \frac{५}{८}$। अतः, यत्र पञ्च चिक्कीखण्डाः अष्टसु बालकेषु समभागेन विभज्यन्ते, तत्र प्रत्येकेन बालकेन प्राप्तांशस्य परिमाणम् अधिकं भवति। तद्विपरीते तु, यत्र एकः चिक्कीखण्डः द्वयोः बालकयोः मध्ये समभागेन विभज्यते, तत्र प्रत्येकेन बालकेन प्राप्तांशस्य परिमाणम् न्यूनं भवति। तस्माद् द्वितीयसमूहस्य बालकाः अधिकान् चिक्कीखण्डान् प्राप्स्यन्ति।

निम्नलिखितसमूहानां सन्दर्भे किं भविष्यति ? कस्मिन् समूहे प्रत्येकः बालकः अधिकपरिमाणं चिक्कीखण्डं प्राप्स्यति?

एकः चिक्कीखण्डः द्वयोः बालकयोर्मध्ये समभागेन विभज्यते। अथवा चत्वारः चिक्कीखण्डाः सप्तसु बालकेषु समभागेन विभज्यन्ते।

शवनम् - इदानीं कस्य समूहस्य बालकाः अधिकपरिमाणं चिक्कीखण्डं प्राप्स्यन्ति ?

मुक्ता - अस्माभिः १/७ तथा ४/७ इत्येतयोः तुलना करणीया।

अधुना $\frac{१ \times ४}{२ \times ४} = \frac{४}{८}$ अतः, $\frac{१}{२} = \frac{४}{८}$

शवनमः - परन्तु, किमर्थं भवती १/२ इत्यत्र अंशस्य (१) हरस्य च (२) ४ इत्यनेन सह गुणनं कृतवती?

मुक्ता - भवती स्वयमेव पश्यतु !

इदानीं चिन्तयन्तु, येषां बालकानां मध्ये विभाजनं भवति, तेषां संख्या समाना अस्ति। किन्तु यस्य विभाजनं भवति, तस्य परिमाणस्य वृद्धिः क्रियते। तर्हि प्रत्येकः बालकः कियदंशं प्राप्स्यति? किमर्थं च? स्वस्य उत्तरं व्याख्यायताम्।

$\frac{१}{५} < \frac{२}{५}$, $\frac{३}{७} < \frac{४}{७}$, एवञ्च $\frac{१}{२} < \frac{५}{८}$

इदानीं विचार्य वदन्तु यत् द्वयोः समूहयोर्मध्ये कस्य समूहस्य बालकाः अधिकपरिमाणं चिक्कीखण्डं प्राप्स्यन्ति ?

गणित कथा

१. **प्रथमः समूहः :** चषकत्रयपरिमितम् इक्षुरसं चतुर्षु बालकेषु समपरिमाणेन विभज्यते।
द्वितीयः समूहः: सप्तचषकपरिमितम् इक्षुरसं दशसु बालकेषु समपरिमाणेन विभज्यते।

२. **प्रथमः समूहः:** चतुश्चषकपरिमितम् इक्षुरसं सप्तसु बालकेषु समपरिमाणेन विभज्यते।
द्वितीयः समूहः: पञ्चचषकपरिमितम् इक्षुरसं सप्तसु बालकेषु समपरिमाणेन विभज्यते।

द्वयोर्मध्ये कौ समूहौ तुलनां कर्तुं सुलभौ स्तः? किमर्थं च?

शवनम् - अत्र प्रथमयोः समूहयोर्मध्ये तुलनां कर्तुं अस्माभिः तादृशौ भग्नांशौ अन्वेषणीयौ, यौ $\frac{३}{४}$ तथा $\frac{७}{१०}$ इत्येतयोः समानौ स्तः।
$\frac{३}{४}$ तथा च $\frac{७}{१०}$

मुक्ता - $\frac{६}{८} = \frac{३}{४}$ एवञ्च $\frac{२१}{३०} = \frac{७}{१०}$, एवं वा?

शबनम् - अत्र एकः नियमः अस्ति। तत्र द्वयोः भग्नांशयोः लघुतमम् एककं समानं भवेत्। यथा, $\frac{२}{६}$ एवञ्च $\frac{३}{६}$ इत्येतयोः सरलतमरूपं ($\frac{१}{६}$) समानम् अस्ति। (अत्र पश्यन्तु यद् उभययोः हरः समानः अस्ति।) परन्तु $\frac{६}{८}$ एवञ्च $\frac{२१}{३०}$ इत्येतयोः सरलतमरूपं समानम् नास्ति। (पश्यन्तु, तयोः हरः समानः नास्ति।)।

मुक्ता - अस्तु। तर्हि तुल्य-भग्नांशानि निर्मामः।
$\frac{३}{४} = \frac{६}{८} = \frac{९}{१२} = \frac{१२}{१६} = \frac{१५}{२०}$ परन्तु कदा गणनां स्थगयिष्यामि ?

शबनम् - अहो, इदानीम् अहम् अवागच्छम्! वयं ४ × १० = ४० इत्येतावत्पर्यन्तं कथं गमिष्यामः इति।

मुक्ता - भवत्याः कथनस्य अभिप्रायः द्वयोः हरयोः गुणनफलम् इति?
अहो, बहु उत्तमः श्रूयते!
अस्माकं पार्श्वे भग्नांशद्वयम् अस्ति - $\frac{३}{४}$ एवञ्च $\frac{७}{१०}$ । अत्र द्वयोः हरयोः गुणनफलम्

अस्ति (४ × १०) ४०।

$\frac{३}{४} = \frac{६}{८} = \frac{९}{१२} = \frac{१२}{१६} = \frac{१५}{२०} = \frac{१८}{२४} = \cdots = \frac{२७}{३६} = \frac{३०}{४०}$

वयं तावद् गच्छामः यावद् हररूपेण ४० इति संख्यां न प्राप्नुमः।

$\frac{७}{१०} = \frac{१४}{२०} = \frac{२१}{३०} = \frac{२८}{४०}$

शबनम् - अतः, $\frac{३}{४}$ एवञ्च $\frac{७}{१०}$ इत्येतयोः तुल्य-भग्नांशाः सन्ति (येषां सरलतमरूपं समानम् अस्ति।) $\frac{३०}{४०}$ एवञ्च $\frac{२८}{४०}$, अथवा $\frac{१५}{२०}$ एवञ्च $\frac{१४}{२०}$ । यतः एतत् स्पष्टम् अस्ति $\frac{३०}{४०} > \frac{२८}{४०}$ अथवा $\frac{१५}{२०}$ एवञ्च $\frac{१४}{२०}$ । यतो हि एतत् स्पष्टं यत् $\frac{३०}{४०} > \frac{२८}{४०}$

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $\frac{३}{४} > \frac{७}{१०}$

निम्नलिखितानां भग्नांशयुग्मानां कृते तुल्यभग्नांशानि एवम् अन्विष्यन्तु, येन तेषां सरलतमरूपामि समानानि स्युः।

क. $\frac{७}{२}$ तथा च $\frac{३}{५}$ ख. $\frac{८}{३}$ तथा च $\frac{५}{६}$ ग. $\frac{३}{४}$ तथा च $\frac{३}{५}$ घ. $\frac{६}{७}$ तथा च $\frac{८}{५}$

ङ. $\frac{९}{४}$ तथा च $\frac{५}{२}$ च. $\frac{१}{१०}$ तथा च $\frac{२}{९}$ छ. $\frac{८}{३}$ तथा च $\frac{११}{४}$ ज. $\frac{१३}{६}$ तथा च $\frac{१}{९}$

भग्नांशानां लघुतमं रूपं प्राप्तुं सरलः उपायः (भग्नांशानां सरलतमानि रूपाणि)

यदि कस्यापि भग्नांशस्य अंशे हरे च १ इति संख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः न स्यात्, तर्हि तत् तस्य भग्नांशस्य **लघुतमं रूपम्**, अथवा **सरलतमं रूपम्** इति उच्यते।

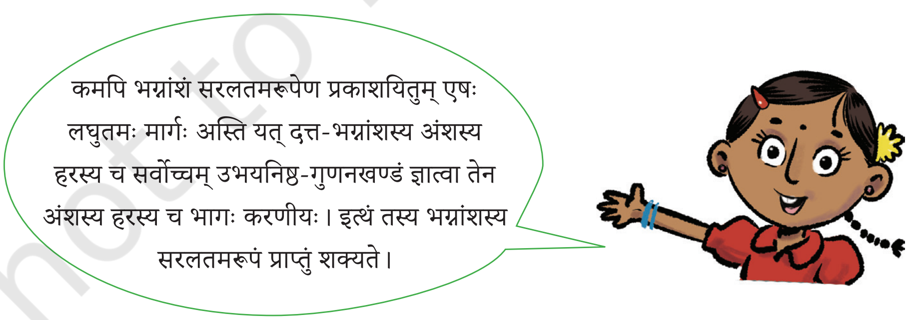
इत्थं यदा भग्नांशस्य अंशे हरे च उभयत्र लघुतमसंख्या भवेत् यत् १ इति संख्याम् अतिरिच्य अन्येन विभाज्यं न भवति, तदा तत् लघुतम-भग्नांशः इति उच्यते।

इदानीं कमपि भग्नांशं कथं सरलतमरूपेण परिवर्तयितुं शक्नुमः इति पश्यामः।

उदाहरणम् - $\frac{१६}{२०}$ इति एकः भग्नांशः दत्तः अस्ति। किमेतद् लघुतमं रूपम् अस्ति? न हि। कारणं, १६ तथा २० इति उभयौ ४ इति संख्यया विभाज्यौ स्तः। इदानीम् अस्य सरलतमरूपं प्राप्तुं प्रयत्नं कुर्मः।

वयं जानीमः यत् १६ (अंशः) तथा २० (हरः) इति उभयौ ४ इति संख्यया विभाज्यौ स्तः।
अतः, $\frac{१६ \div ४}{२० \div ४} = \frac{४}{५}$

किन्तु इदानीं पश्यन्तु, ४ तथा ५ इत्येतयोः १ इति संख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः नास्ति। अतः $\frac{१६}{२०}$ इति भग्नांशं $\frac{४}{५}$ इत्यनेन लघुतमरूपेण प्रकाशयितुं शक्यते। अतएव अस्माकम् अभीष्टं सरलतमरूपम् (लघुतमः भग्नांशः) अस्ति $\frac{४}{५}$।



कमपि भग्नांशं सरलतमरूपेण परिवर्तयितुं अधोलिखितानि सोपानानि अनुसरणीयानि।

चिन्तयन्तु, वयं $\frac{३६}{६०}$ इति भग्नांशं सरलतमरूपेण परिवर्तयितुम् इच्छामः। अतः सर्वादौ अस्माभिः एतद् लक्षणीयं यद् अत्र अंशः हरश्च उभयौ युग्मसंख्ये स्तः। अतः वयम् उभयं २ इति संख्यया भागं कुर्मः। तदा $\frac{३६}{६०} = \frac{१८}{३०}$ इति प्राप्स्यामः।

पुनः लक्षणीयं यत् अंशः हरश्च उभयौ युग्मसंख्ये स्तः। अतः वयम् उभयं पुनः २ इति संख्यया भागं कुर्मः। तदा $\frac{१८}{३०} = \frac{९}{१५}$ इति प्राप्स्यामः। इदानीं लक्षणीयं यत् ९ तथा १५ इत्येतयोः ३ इति उभयनिष्ठः गुणनखण्डः अस्ति। अतः वयम् उभयं पुनः ३ इति संख्यया भागं कुर्मः। तदा $\frac{९}{१५} = \frac{३}{५}$ इति प्राप्स्यामः।

इदानीं पश्यन्तु, ३ तथा ५ इत्येतयोः १ इति संख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः नास्ति। अतः $\frac{३६}{६०}$ इति भग्नांशं $\frac{३}{५}$ इत्यनेन लघुतमरूपेण प्रकाशयितुं शक्यते।

तथैव वयम् एतदपि वक्तुं शक्नुमः यत् $\frac{३६}{६०}$ इत्यत्र अंश-हरयोः १२ × ३ इति उभयनिष्ठः गुणनखण्डः अस्ति।

यतो हि, ३६ = ३ × १२

तथैव ६० = ५ × १२

अतः, $\frac{३६}{६०}$ इत्यस्य सरलतमं रूपम् अस्ति $\frac{३}{५}$ । $\frac{३६}{६०} = \frac{३}{५}$ ।

यमपि मार्गं वयम् अनुसरामः, उत्तरं समानं भविष्यति। परन्तु कदाचित् सरलसोपानानि अनुसृत्य भग्नांशस्य लघुतमरूपनिर्णयः सुलभः भवति।

एतत् निश्चिन्वन्तु

एतेषां भग्नांशानां सरलतमरूपम् अभिजानन्तु।

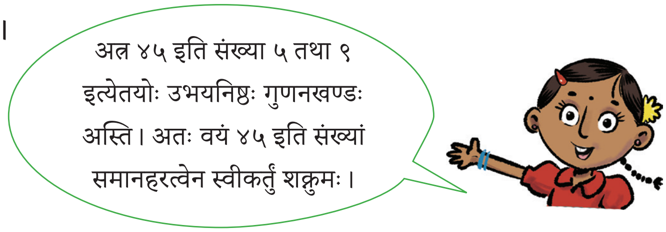
क. $\frac{१७}{५१}$ ख. $\frac{६४}{१४४}$ ग. $\frac{१२६}{१४७}$ घ. $\frac{५२५}{११२}$

७.७ भग्नांशानां तुलना

कः बृहत्तरः अस्ति, $\frac{४}{५}$ उत $\frac{७}{९}$? प्रायः भग्नांशानां सन्दर्भे इदं वक्तुं एतावत् सरलं न भवति यद् एतेषु कतमः भग्नांशः बृहत्तमः इति। किन्तु समान-विभाजकयुक्तयोः भग्नांशयोः तुल्य-भग्नांशः कथं अन्वेष्टव्यः इति वयं जानीमः। अधुना वयं कथं तस्य उपयोगं कर्तुं शक्नुमः इति पश्यामः।

$\frac{४}{५} = \frac{४×९}{५×९} = \frac{३६}{४५}$

$\frac{७}{९} = \frac{७×५}{९×५} = \frac{३५}{४५}$



स्पष्टतया, $\frac{३६}{४५} > \frac{३५}{४५}$

अतः, $\frac{४}{५} > \frac{७}{९}$!

इदानीम् इमम् उपायम् अवलम्ब्य $\frac{७}{९}$ तथा $\frac{१२}{२१}$ इति भग्नांशयोः तुलनां कुर्मः।

अत्र ६३ इति संख्या ९ तथा २१ इत्येतयोः उभयनिष्ठः गुणनखण्डः अस्ति। अतः वयम् एवं लेखितुं शक्नुमः -

$\frac{७}{९} = \frac{७\times७}{९\times७} = \frac{४९}{६३}$, $\frac{१७}{२१} = \frac{१७\times३}{२१\times३} = \frac{५१}{६३}$

स्पष्टतया, $\frac{४९}{६३} < \frac{५१}{६३}$ ... अतः, $\frac{७}{९} < \frac{१७}{२१}$!

एहि, संक्षिपामहे!

द्वयोः भग्नांशयोर्मध्ये भग्नांशेषु वा कः बृहत्तरः इति अभिज्ञातुं सरलसोपानानि -

चरणः १ : दत्तभग्नांशानि तुल्यभग्नांशरूपेण परिवर्तयन्तु येन तेषां सर्वेषां समानहराः स्युः।

चरणः २ : अधुना केवलं तुल्यभग्नांशानाम् अंशानां तुलनां कृत्वा तेषु कः बृहत्तमः इति अभिजानन्तु। तेन च दत्तभग्नांशानां मध्ये कः बृहत्तमः इति निर्णयं कुर्वन्तु।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. अधोलिखितानां भग्नांशानां तुलनां कुर्वन्तु तथा युक्तिपूर्वकं स्वस्य उत्तरं प्रमाणीकुर्वन्तु।

क. $\frac{८}{३}, \frac{५}{२}$ ख. $\frac{४}{९}, \frac{३}{७}$ ग. $\frac{७}{१०}, \frac{९}{१४}$

घ. $\frac{१२}{५}, \frac{८}{५}$ ङ. $\frac{९}{४}, \frac{५}{२}$

२. अधोलिखितानि भग्नांशानि आरोहणक्रमेण लिखन्तु।

क. $\frac{७}{१०}, \frac{११}{१५}, \frac{२}{५}$ ख. $\frac{१९}{२४}, \frac{५}{६}, \frac{७}{१२}$

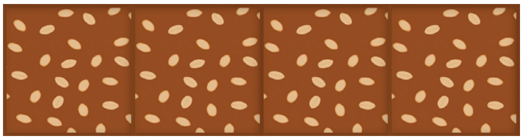
३. अधोलिखितानि भग्नांशानि अवरोहणक्रमेण लिखन्तु।

क. $\frac{२५}{१६}, \frac{७}{८}, \frac{१३}{४}, \frac{१७}{३२}$ ख. $\frac{३}{४}, \frac{१२}{५}, \frac{७}{१२}, \frac{५}{४}$

७.८ भग्नांशानां योगः व्यवकलनं च

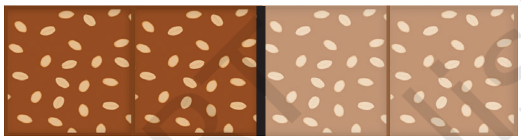
मीनायाः पिता कतिपयान् चिक्कीखण्डान् निर्मितवान्। मीना तस्य अर्धभागं ($\frac{१}{२}$) खादितवती। तस्याः अनुजश्च तस्य चतुर्थांशं ($\frac{१}{४}$) खादितवान्। तर्हि

मीना, तस्याः भ्राता च उभौ मिलित्वा समग्रस्य चिक्कीखण्डस्य कियदंशं खादितवन्तौ ?



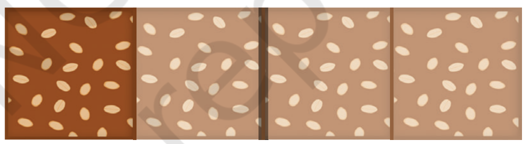
वयम् एकं चिक्कीखण्डं स्वीकृत्य तस्य पूर्वोक्तरीत्या विभाजनं कृत्वा उत्तरम् अन्वेष्टुं प्रयत्नं कुर्मः।

मीना अस्य अर्धभागं ($\frac{१}{२}$) खादितवती, यथा चित्रे दर्शितम् अस्ति।

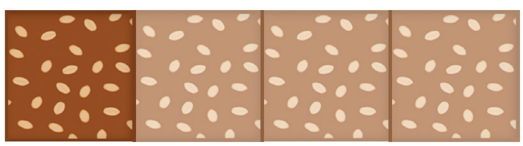


इदानीं अवशिष्टम् अर्धभागं पुनः द्वयोः भागयोः विभाजयामः। अस्य प्रत्येकः भागः सम्पूर्णचिक्कीखण्डस्य ($\frac{१}{४}$) चतुर्थांशः अस्ति।

मीनायाः अनुजः सम्पूर्णस्य चिक्कीखण्डस्य चतुर्थांशं ($\frac{१}{४}$) खादितवान्, यथा चित्रे दर्शितम् अस्ति।



आहत्य उभौ मिलित्वा खादितवन्तौ $\frac{१}{२}$ (मीना) + $\frac{१}{४}$ (तस्याः अनुजः) अर्थात्, सम्पूर्णस्य चिक्कीखण्डस्य यावदंशः खादितः।



$= \frac{१}{२} + \frac{१}{४}$

$= \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४}$

$= ३ \times \frac{१}{४} = \frac{३}{४}.$

समानहराणाम् उपयोगेन भग्नांशानां योगः

उदाहरणम् : $\frac{२}{५}$ एवञ्च $\frac{१}{५}$ इत्येतयोः योगफलम् अन्विष्यन्तु।

आयताकारां पट्टिकाम् एकाम् उपयुज्य भग्नांशद्वयं प्रदर्शयामः। द्वयोः भग्नांशयोः $\frac{१}{५}$ इति लघुतमं रूपं समानम् अस्ति। अतः, प्रत्येकं पट्टिका पञ्चसु समानभागेषु विभज्यते।

इत्थं $\frac{२}{५}$ इति भग्नांशम् एवंरूपेण प्रदर्शयिष्यामः -

तथा $\frac{१}{५}$ इति भग्नांशम् एवंरूपेण प्रदर्शयिष्यामः -

अत्र छायाङ्कितभागानां कुलसंख्या = दत्तभग्नांशयोः योगफलम्। एतेषां प्रत्येकं भागः $\frac{१}{५}$ इति समान-भग्नांशस्य प्रतिनिधित्वं करोति।

अस्मिन् सन्दर्भे, छायाङ्कितभागानां कुलसंख्या भवति ३ इति। यतो हि, प्रत्येकं छायाङ्कितभागः $\frac{१}{५}$ इति समान-भग्नांशस्य प्रतिनिधित्वं करोति, अतः वयं पश्यामः यत् त्रयः छायाङ्कितभागाः मिलित्वा $\frac{३}{५}$ इति भग्नांशस्य प्रतिनिधित्वं कुर्वन्ति।

अतः, $\frac{२}{५} + \frac{१}{५} = \frac{३}{५}$?

उदाहरणम् : $\frac{४}{७}$ एवञ्च $\frac{६}{७}$ इत्येतयोः योगफलम् अन्विष्यन्तु।

पूर्ववद् आयताकारां पट्टिकाम् एकाम् उपयुज्य भग्नांशद्वयं प्रदर्शयामः। अत्र द्वयोः भग्नांशयोः $\frac{१}{७}$ इति लघुतमं रूपं समानम् अस्ति। अतः, प्रत्येकपट्टिका सप्तसु समानभागेषु विभज्यते।

इत्थं $\frac{४}{७}$ इति भग्नांशम् एवंरूपेण प्रदर्शयिष्यामः -

तथा $\frac{६}{७}$ इति भग्नांशम् एवंरूपेण प्रदर्शयिष्यामः -

अस्मिन् सन्दर्भे, छायाङ्कितभागानां कुलसंख्या भवति १० इति। यतो हि, प्रत्येकं छायाङ्कितभागः $\frac{१}{७}$ इति समान-भग्नांशस्य प्रतिनिधित्वं करोति, अतः वयं पश्यामः यत् १० छायाङ्कितभागाः मिलित्वा $\frac{१०}{७}$ इति भग्नांशस्य प्रतिनिधित्वं कुर्वन्ति।

समान-आंशिक-एककेन सह खण्डान् योजयन्, केवलं प्रत्येकात् खण्डात् आंशिक-एककानां सङ्ख्यां योजयतु।

अतः, $\frac{४}{७} + \frac{६}{७} = \frac{१०}{७}$

$= १ + \frac{३}{७}$

$= १\frac{३}{७}.$

संख्यारेखायाः उपयोगं कृत्वा $\frac{४}{७}$ एवञ्च $\frac{६}{७}$ इति भग्नांशयोः योगफलम् अन्विष्यन्तु। समानमुत्तरं प्राप्नोति वा ?

भिन्नभिन्नहराणाम् उपयोगेन भग्नांशानां योगः

उदाहरणम् : $\frac{१}{४}$ एवञ्च $\frac{१}{३}$ इत्येतयोः योगफलम् अन्विष्यन्तु।

भिन्न-भिन्न-हरैः सह भग्नांशानि योजयितुम्, आदौ तानि तुल्यभग्नांशरूपेण परिवर्तयन्तु,यत्र तेषां सर्वेषां हराः समानाः भवन्ति। अस्मिन् सन्दर्भे ३ × ४ = १२ इति उभयोः हरयोः गुणनं कृत्वा वयं उभयनिष्ठ-

गुणनखण्डरूपेण १२ इति संख्यां प्राप्नुमः। अतः $\frac{१}{१२}$ इति भग्नांशम् उपयुज्य वयं तुल्य-भग्नांशम् अन्वेष्टुं प्रयत्नं कुर्मः।

एहि, वयं प्रत्येकं भग्नांशानां कृते समानान् भग्नांशान् लिखामः -

$\frac{१}{४} = \frac{१ \times ३}{४ \times ३} = \frac{३}{१२}$, $\frac{१}{३} = \frac{१ \times ४}{३ \times ४} = \frac{४}{१२}$.

एवं $\frac{३}{१२}$ तथा $\frac{४}{१२}$ इत्येतयोः तुल्य-भग्नांशः अस्ति $\frac{१}{१२}$ ।

अतः, $\frac{१}{४} + \frac{१}{३} = \frac{३}{१२} + \frac{४}{१२} = \frac{७}{१२}$

एतस्याः योजनायाः पद्धतिः, या कस्यापि भिन्नांशानां योजनाय कार्यं करोति, सा. श. ६२८ तमे वर्षे ब्रह्मगुप्तेन प्रथमवारं सामान्यरूपेण स्पष्टतया वर्णिता आसीत्! भिन्नांशानां विकासस्य इतिहासस्य वर्णनं वयं पश्चात् अध्याये विवरिष्यामः। इदानीं, वयं केवलं ब्रह्मगुप्तस्य भिन्नांशानां योजनायाः पद्धत्याः सोपानान् संक्षेपयामः।

ब्रह्मगुप्तस्य खण्डांशयोजनपद्धतिः

१. समतुल्यं खण्डान् अन्विष्यतु येन खण्डीय-एककं सर्वेषु खण्डेषु सामान्यं भवति। एतत् सामान्य-गुणकस्य मूल्यनिर्धारणद्वारा कर्तुं शक्यते (उदा., मूल्यनिर्धारणस्य उत्पादः, अथवा मूल्यनिर्धारणस्य लघुतमः सामान्य-गुणकः)।

२. समान-आंशिक-एककैः सह एतेषां समतुल्य-खण्डान् योजयतु। एतत् गणकयन्त्रं योजयित्वा समानं मूल्यनिर्धारणं स्थापयित्वा च कर्तुं शक्यते।

३. यदि आवश्यकं भवति तर्हि न्यूनतमावधौ परिणामं प्रकटयतु।

ब्रह्मगुप्तस्य पद्धत्याः अन्यम् उदाहरणं स्वीकरोमि।

उदाहरणम् : योगफलम् अन्विष्यतु, $\frac{२}{३}$ तथा च $\frac{१}{५}$

दत्तभागानां विभाजकाः ३ तथा ५ सन्ति। न्यूनतमं ३ तथा ५ इत्येतयोः सामान्या सर्वन्यूना संख्या अस्ति १५ इति। ततः वयं पश्यामः यत् -

$\frac{२}{३} = \frac{२ \times ५}{३ \times ५} = \frac{१०}{१५}$, $\frac{१}{५} = \frac{१ \times ३}{५ \times ३} = \frac{३}{१५}$

अतः, $\frac{२}{३} + \frac{१}{५} = \frac{१०}{१५} + \frac{३}{१५} = \frac{१३}{१५}$

उदाहरणम् : योगफलम् अन्विष्यतु। $\frac{१}{६}$ तथा च $\frac{१}{३}$

६ तथा ३ इत्येतयोः लघुतमः सामान्यगुणः ६ अस्ति।
$\frac{१}{६}$ भविष्यन्ति $\frac{१}{६}$
$\frac{१}{३} = \frac{१ \times २}{३ \times २} = \frac{२}{६}$
अतः, $\frac{१}{६} + \frac{१}{३} = \frac{१}{६} + \frac{२}{६} = \frac{३}{६}$.

खण्डः $\frac{३}{६}$ इति इदानीं न्यूनतमावधेषु पुनः अभिव्यक्तुं शक्यते, यदि अपेक्षितम्। एतत् गणकयन्त्रयोः विभाजनेन कर्तुं शक्यते। ३ द्वारा विभाजकः (३ और ६ का सबसे बड़ा सामान्य कारक):
$\frac{३}{६} = \frac{३ \div ३}{६ \div ३} = \frac{१}{२}$

अतः, $\frac{१}{६} + \frac{१}{३} = \frac{१}{२}$

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. ब्रह्मगुप्तस्य पद्धत्या निम्नलिखितानि खण्डानि योजयतु।

क. $\frac{२}{७} + \frac{५}{७} + \frac{६}{७}$ ख. $\frac{३}{४} + \frac{१}{३}$ ग. $\frac{२}{३} + \frac{५}{६}$ घ. $\frac{२}{३} + \frac{२}{७}$ ङ. $\frac{३}{४} + \frac{१}{३} + \frac{१}{५}$

च. $\frac{२}{३} + \frac{४}{५}$ छ. $\frac{४}{५} + \frac{२}{३}$ ज. $\frac{३}{५} + \frac{५}{८}$ झ. $\frac{९}{२} + \frac{५}{४}$ ञ. $\frac{८}{३} + \frac{२}{७}$

ट. $\frac{३}{४} + \frac{१}{३} + \frac{१}{५}$ ठ. $\frac{२}{३} + \frac{४}{५} + \frac{३}{७}$ ड. $\frac{९}{२} + \frac{५}{४} + \frac{७}{६}$

२. रहीम् मिश्रणं $\frac{२}{३}$ येलो पेण्ट् इत्यस्य अक्षराणि $\frac{३}{४}$ नीलवर्णस्य लेटर्स्-तः हरितवर्णं करोतु। सः निर्मितस्य हरितवर्णस्य परिमाणं किम्?

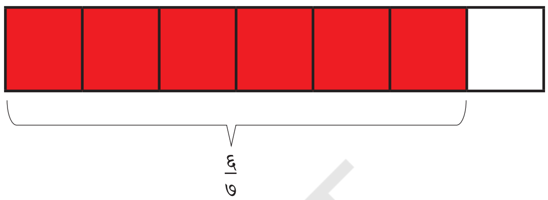
३. गीता उत्कीर्णम् आसीत्। $\frac{२}{५}$ लेस् इत्यस्य मीटर् तथा शमीम् बौट् च। $\frac{३}{४}$ मीटर् आफ़ द समानं लेस् इतीदं पट्टिकवस्त्रस्य उपरि पूर्णं सीमाम् स्थापयति यस्य परिमापकः अस्ति। अस्य दीर्घता १ मीटर् अस्ति। लेस् इत्यस्य कुलदीर्घतां पश्यतु यत् तौ उभौ अपि क्रीतवन्तः। सम्पूर्णे सीमायाम् आच्छादयितुं लेस् पर्याप्तं भविष्यति वा?

समानैः आंशिकैः एककैः विभाजकैर्वा उपभागानाम् उपविभाजनम्

ब्रह्मगुप्तस्य पद्धतिः यदा उपविभाजनं भवति तदा अपि प्रयुज्यते!

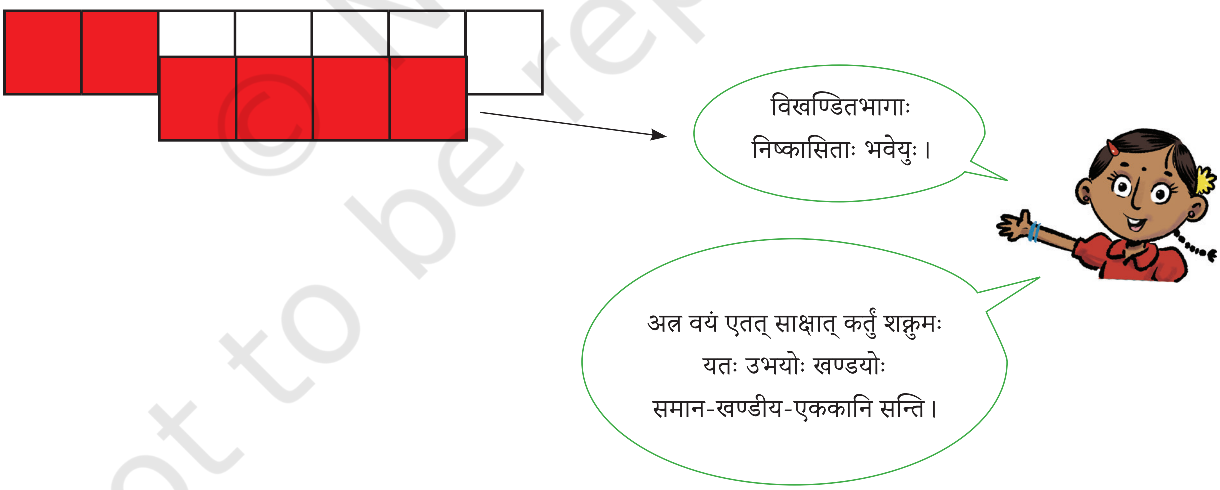
विभाजनसमस्यया सह आरम्भं कुर्वन्तु, $\frac{४}{७}$ इत्यतः $\frac{६}{७}$ विभाजयन्तु, यद्धि भवति $\frac{६}{७} - \frac{४}{७}$?

अस्याः समस्यायाः निराकरणाय, वयं पुनः आयताकाराः पट्टिकाः उपयोक्तुं शक्नुमः। उभयत्रापि खण्डेषु, खण्डीय-एककं समानम् अस्ति, अर्थात्। $\frac{१}{७}$. आयताकारपट्टिकायाः उपयोगेन बृहत्तरभागस्य प्रतिनिधित्वं प्रथमं कुर्वन्तु। माडेल् इतीदं दर्शयति यथा -



प्रत्येकस्य छायायुक्तभागस्य प्रतिनिधित्वम्। $\frac{१}{७}$... इदानीं, अस्माभिः उपाख्यानम् आवश्यकम्। $\frac{४}{७}$...

करणीयम्। अस्माभिः ४ छायायुक्तभागान् निष्कासयन्तु।



अतः, वयं २ छायायुक्तैः भागैः, अर्थात्, परित्यक्ताः। $\frac{६}{७} - \frac{४}{७} = \frac{२}{७}$.

संख्यायाः पङ्क्तिं उपयुज्य एव व्यायामम् प्रयतताम्।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. $\frac{५}{८} - \frac{३}{८}$ 	२. $\frac{७}{९} - \frac{५}{९}$ 	३. $\frac{१०}{२७} - \frac{१}{२७}$

भिन्नैः आंशिकैः एककैः विभाजकैर्वा उपभागानाम् उपविभाजनम्

उदाहरणम् - वदतु, $\frac{३}{४} - \frac{२}{३}$ अस्य उत्तरं किं भविष्यति?

यथा वयं पूर्वमेव समान-आंशिक-एककैः सह उप-भिन्नानां प्रक्रियाम् जानीमः, तथैव समान-आंशिक-एककैः सह समान-भिन्नैः सह प्रदत्त-भिन्नैः सह प्रत्येकं परिवर्तयामः।

आम्! एतत् कुर्वन्तः वयं सहजतया द्वयोः खण्डयोः विभाजनं कर्तुं शक्नुमः।

$$\frac{३}{४} = \frac{(३\times३)}{(४\times३)} = \frac{९}{१२}$$

चिन्तयतु! किमर्थं वयं ३ अङ्कैः गुणितं गणकं मूल्यनिर्धारणं च चितवन्तः?

एवं तथैव,

$$\frac{२}{३} = \frac{(२\times४)}{(३\times४)} = \frac{८}{१२}$$

पुनः पुनः! किमर्थं वयं अत्र ४ द्वारा गणकयन्त्रं मूल्यनिर्धारणं च द्विगुणितुम् अचिनोम्?

अतः, $\frac{३}{४} - \frac{२}{३} = \frac{९}{१२} - \frac{८}{१२} = \frac{१}{१२}$

ब्रह्मगुप्तस्य द्वयोः खण्डयोः उपविभाजनस्य पद्धतिः -

१. दत्तभागान् समानभाग-एककेन सह समतुल्यभागैः सह परिवर्तयतु, अर्थात्, समान-विभाजकं।

२. समान-आंशिक-घटकयुक्तानां खण्डानां उपविभाजनस्य वहनं करोतु। एतत् न्यूमरेटर्स् इत्यस्य व्यवकलनेन, समानं मूल्यनिर्धारणं स्थापयित्वा च कर्तुं शक्यते।

३. यदि आवश्यकं भवति तर्हि न्यूनतमावधेः परिणामं सरलीकरोतु।

एतत् निश्चिन्वन्तु

१. ब्रह्मगुप्तस्य पद्धत्या निम्नलिखितानि सब्ट्राक्शन् इत्येतानि स्वीकरोतु।

क. $\frac{८}{१५} - \frac{३}{१५}$ ख. $\frac{२}{५} - \frac{४}{१५}$ ग. $\frac{५}{६} - \frac{४}{९}$ घ. $\frac{२}{३} - \frac{१}{२}$

२. उपशीर्षिकाः यथा सूच्यन्ते।

क. $\frac{१३}{४}$ इत्यतः $\frac{१०}{३}$ ख. $\frac{१८}{५}$ इत्यतः $\frac{२३}{३}$ ग. $\frac{२९}{७}$ इत्यतः $\frac{४५}{७}$

३. निम्नलिखितानां समस्यानां निराकरणम्।

क. जयायाः विद्यालयः अस्ति। $\frac{७}{१०}$ तस्याः गृहात् कि. मी. दूरे अस्ति। सा कार्-यानं स्वीकरोति। $\frac{१}{२}$ प्रतिदिनं तस्याः गृहात् कि. मी. दूरे, ततः तस्याः विद्यालयं प्राप्तुं अवशिष्टदूरं गच्छतु। सा प्रतिदिनं विद्यालयं प्राप्तुं कियत् दूरं गच्छति?

ख. जीविका स्वीकरोति। $\frac{१०}{३}$ उद्यानस्य पूर्णपर्यन्तम् गन्तुं निमेषाः, तस्याः मित्रं नामित् च स्वीकरोति। $\frac{१३}{४}$ तस्मिन् एव कार्यं कर्तुं निमेषाः। कः न्यूनं समयं यापयति, कथं अधिकं च?

७.९ इतिहासस्य एकः खण्डः

प्राचीनभारते किं खण्डः इति कथ्यते इति भवान् जानाति वा? संस्कृतभाषायां इदं बिन्ना इति उच्यते, यस्य अर्थः ' भग्नः ' इति। इदं भागः अथवा अंशः इत्यपि उच्यते यस्य अर्थः ' भागः ' अथवा ' खण्डः ' इति।

अद्यत्वे, वैश्विकरूपेण, भारते उत्पन्नानि खण्डानि वयं कथं लिखामः इति। प्राचीन-भारतीय-गणितीय-ग्रन्थेषु, यथा बक्शाली-पाण्डुलिप्यां,

(प्रायः ३०० सा. श. वर्षात्), यदा ते १ लेखितुं इच्छन्ति स्म, तदा ते तत् १ रूपेण लिखितम्।

२ यत् अद्य वयं यथा प्रकारेण लिखामः तदनुसृत्य वस्तुतः अतीव सदृशं भवति! एषा लेखनपद्धतिः तथा खण्डैः सह कार्यं च अग्रिमेषु कतिपयेषु शताब्देषु भारते अनुवर्तयितुं अनुवर्तते, यथा आर्यभट्टेन (सा. श. ४९९), ब्रह्मगुप्तेन (सा. श. ६२८), श्रीधराचार्येण च।

पश्चात् मोरोक्कन्-गणितशास्त्रज्ञेन अल्-हस्सर् इत्यनेन (१२ शताब्द्यां) खण्डाः प्रवर्तिताः। अग्रिमेषु कतिपयेषु शताब्देषु एषा सूचना ततः यूरोप्-देशे, सम्पूर्णे विश्वे च प्रसृता।

प्राचीन-ईजिप्षियन्-ब्याबिलोनियन्-संस्कृतेः इव अन्येषु संस्कृतेषु अपि खण्डाः उपयुज्यन्ते स्म, परन्तु ते मुख्यतया केवलं खण्डीय-एककान् एव उपयुञ्जन्ते स्म, यत् गणके १ खण्डयुक्ताः खण्डाः इति। अधिक-सामान्य-खण्डाः, अधुना ' ईजिप्षियन्-फ्रेक्शन्स् ' इति नाम्ना प्रसिद्धानां फ्रेक्शनल्-एककानाम् सङ्कलनरूपेण प्रकटिताः आसन्। आंशिकानां योगरूपेण संख्याः लिखन्तु पाजल्स् यद्धि, $\frac{११}{२४} = \frac{१}{२} + \frac{१}{६} + \frac{१}{८}$ इति। अधः एतादृशं एकं पजल् वयं विचारयामः।

सामान्य-खण्डाः (यत्र संख्याकारः आवश्यकतया १ नास्ति) भारते प्रथमवारं प्रवर्तिताः आसन्, तेषां नियमैः सह, यथा योगः, सब्ट्राक्षन्, गुणनं, खण्डानां विभाजनम् इत्यादीनि एरिथ्मिटिक्-कार्याणि। प्राचीनभारतीयसंस्करणानि ' सुल्बा-सूत्राणि ' इति आह्वयन्ति यत् वैदिककाले अपि भारतीयैः विभाजनेन सह कार्याणि कर्तुं नियमाः आविष्कृताः आसन् इति। सामान्यनियमाः प्रक्रियाः च विखण्डैः सह कार्यार्थम् तथा गणनायै च ब्रह्मगुप्तेन औपचारिकरूपेण आधुनिकरूपेण च संहितां कृतवत्सु प्रथमाः आसन्।

ब्रह्मगुप्तस्य विखण्डैः सह कार्यस्य, गणनायाः च विधयः अद्यत्वे अपि उपयुज्यन्ते। उदाहरणार्थं, ब्रह्मगुप्तः कथं योजयेत्, उपविभागान् च कथं योजयेत् इति अवर्णयत्।

" संख्यात्मकस्य गुणकस्य च गुणनेन अन्येषां कूपकैः प्रत्येकस्य अंशानां, अंशाः सामान्यतः परिभ्रमकं प्रति न्यूनीकृताः भवन्ति। ततः, अतिरिक्तसन्दर्भे, संख्याकाराः (उपरिष्टस्य न्यूनीकरणस्य अनन्तरं प्राप्ताः) योजिताः भवन्ति। घटनसन्दर्भे तेषां भेदः गृह्यते।’" ततः, योजनायाः सन्दर्भे, सङ्ख्यकाः योजिताः भवन्ति (उपरि ह्रासस्य अनन्तरं प्राप्ताः)। सब्ट्राक्षन् इत्यस्य सन्दर्भे तेषां भेदः स्वीकृतः भवति " (ब्रह्मगुप्तः, ब्रह्मस्फुटसिद्धान्तः, पर्व १२.२, ख्रीष्टाब्दः ६२८ वर्षः)।

आगामिषु कतिपयेषु शताब्देषु अरब्-जनानाम् माध्यमेन भारतीय-परिकल्पनानां पद्धत्याः च सम्बद्धाः खण्डाः यूरोप्-देशं प्रति प्रेषितानि, ततः ते १७ शताब्द्याः परितः यूरोप्-देशे सामान्य-उपयोगे आगताः, ततः सम्पूर्णे विश्वे प्रसृताः च।

प्रहेलिका !

यदि एकं समानं विखण्डीयं एककं उपयुज्यते तर्हि उदाहरणार्थं, योगफलम् १ प्राप्तुं विखण्डीयं एककं योजयितुं सुलभं भवति।

$$\frac{१}{२} + \frac{१}{२} = १,\ \frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३} = १,\ \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} = १$$

तथापि, भवान् एकं मार्गं चिन्तयितुं शक्नोति यत् फ्रेक्शनल्-यूनिट्स् योजयतु यानि सर्वाणि भिन्नानि सन्ति १ प्राप्तुं?

१ प्राप्तुं भिन्नान् भिन्नान् आंशिकान् घटकान् योजयितुं न शक्यते। अस्य कारणम् अस्ति यत् $\frac{१}{२}$ बृहत्तमः आंशिकः घटकः अस्ति, तथा $\frac{१}{२} + \frac{१}{२} = १$.

भिन्नान् आंशिक-घटकान् प्राप्तुं, वयं तस्य न्यूनातिन्यूनं एकं प्रतिस्थापयेयुः। $\frac{१}{२}$ केषाञ्चन लघुतरैः आंशिक-एककैः सह-परन्तु तदा योगः १ तः न्यूनः स्यात्! अतः द्वयोः भिन्नयोः आंशिक-घटकयोः कृते १ योजयितुं न शक्यते।

वयं त्रिषु भिन्न-भिन्न-आंशिक-एककेषु १ इत्यस्य योगस्य लेखनस्य मार्गस्य स्थाने तत् द्रष्टुं प्रयतामः।

प्रयतताम् इदम्

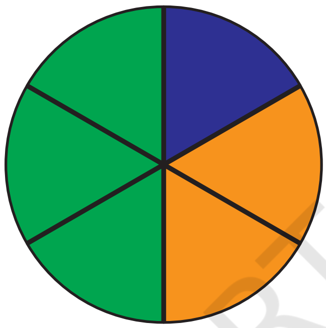
१. किं भवन्तः त्रीणि भिन्नानि आंशिक-घटकानि अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति यानि १ पर्यन्तं योजयन्ति?

इदं समस्यायाः एकमात्रं समाधानम् अस्ति (३ खण्डानां क्रमं परिवर्तयितुं)! भवान् तत् अन्वेष्टुं शक्नोति वा? अग्रे पठनात् पूर्वं तत् अन्वेष्टुं प्रयतताम्।

अत्र उपायम् अन्वेष्टुं व्यवस्थितः उपायः अस्ति। वयं जानीमः यत् $\frac{१}{३} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३} = १$ इति। भिन्नानि भवितुं खण्डीय-एककानि प्राप्तुं, वयं न्यूनातिन्यूनं एकस्मिन् वर्धितुं शक्नुमः। $\frac{१}{३}$ तथा च अन्यस्य न्यूनातिन्यूनं एकस्मिन् न्यूनीभवति। $\frac{१}{३}$ तस्य वृद्धेः क्षतिपूर्त्यर्थं। वृद्धेः एकमात्रः उपायः अस्ति। $\frac{१}{३}$ अन्यः आंशिकः घटकः तस्य स्थाने स्थापयेत्। $\frac{१}{२}$... अतः $\frac{१}{२}$ आंशिक-एककेषु अन्यतमः भवेत्।

इदानीं $\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} = १$ इति। विभाजक-एककानि भिन्नानि भवेयुः, अस्माभिः एकस्य वृद्धिः भविष्यति। $\frac{१}{४}$अन्येषु च न्यूनीभवति। $\frac{१}{४}$ तस्य वृद्धेः क्षतिपूर्त्यर्थं। इदानीं वर्धयितुं एकमात्रः उपायः अस्ति। $\frac{१}{४}$ अन्यं खण्डीय-एककं प्रति, यत् भिन्नम् अस्ति। $\frac{१}{२}$, तस्य स्थाने स्थापयेत् $\frac{१}{३}$ इति। अतः खण्डद्वयम् अवश्यमेव भवेत्। $\frac{१}{२}$ तथा च $\frac{१}{३}$! ततः तृतीयः खण्डः कः भवितुम् अर्हति, अतः त्रयः खण्डाः १ पर्यन्तं योजयन्ति?

उपर्युक्तस्य समस्यायाः एकमात्रः उपायः किमर्थं अस्ति इति एतत् व्याख्याति।



$\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{६} = १$

प्रयतताम् इदम्

यदि वयं चतुर्णां भिन्नानां आंशिक-घटकानां कृते पश्यामः तर्हि तत् किं योजयिष्यति? १ प्रति?

२. किं भवन्तः चतुर्णां भिन्नान् आंशिकान् घटकान् अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति यानि १ पर्यन्तं योजयन्ति?

अस्य समस्यायाः षट् समाधानानि सन्ति इति ज्ञायते! भवान् तेषु न्यूनातिन्यूनं एकं प्राप्तुं शक्नोति वा? भवान् तान् सर्वान् अन्वेष्टुं शक्नोति वा? भवन्तः द्वि-त्रि-आंशिक-घटकयोः प्रकरणेषु समानं तर्कं उपयोक्तुं शक्नुवन्ति-अथवा स्वकीयं पद्धतिम् अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति!

यदा भवान् उपायम् अन्विष्यत्, तदा तस्य दृश्यीकरणार्थं उपरिष्टे चित्रे भागरूपेण वृत्तं विभाजयितुं प्रयतताम्!

सारसंक्षेपः

- **समभागः समानभागः अस्ति** - यदा एककानां सम्पूर्णसङ्ख्या समानभागेषु विभक्ता भवति तथा च समानरूपेण विभक्ता भवति, **खण्डः** परिणाम.
- **आंशिक एककानि** - यदा एकं सम्पूर्णं प्राथमिकं एककं समानभागेषु विभक्तं भवति, तदा प्रत्येकं भागं अ इति कथ्यते। **आंशिक-एककम्।**
- **पठनस्य खण्डाः** - एतादृशे खण्डे $\frac{५}{६}$, ५ इति कथ्यते **गणकः।** तथा ६ इति कथ्यते **विभाजकः।**
- **मिश्र-खण्डाः** - अस्मिन् पूर्णसङ्ख्याभागः, आंशिकभागः च स्तः।
- **सङ्ख्या पङ्क्तिः** - खण्डाः सङ्ख्यायाः पङ्क्तौ दर्शयितुं शक्यन्ते। प्रत्येकस्य खण्डस्य अङ्करेखायां अङ्कः सम्बद्धः भवति।
- **समतुल्य-खण्डाः** - यदा द्वौ वा अधिकौ खण्डौ समानभागस्य वा सङ्ख्यायाः वा प्रतिनिधित्वं कुर्वन्ति, तदा ते आहूयन्ते। **समतुल्य-खण्डाः**.
- **निम्नतमा शब्दावली** - एकः खण्डः यस्य गणकः मूल्यनिर्धारकः च अन्यस्य अपेक्षया अन्यत् सामान्यं कारकं नास्ति इति उक्तः अस्ति। न्यूनतमाः नियमाः अथवा तस्यां सरलतमं रूपं।
- **ब्रह्मगुप्तस्य खण्डान् योजयितुं विधिः अस्ति** - यदा खण्डान् योजयति, तदा तान् समान-खण्ड-एककेन सह समतुल्य-खण्डेषु परिवर्तयतु (यथा, समान-विभाजकः), ततः प्रत्येकस्मिन् खण्डे खण्ड-एककानां सङ्ख्या योजयतु येन योगः भवेत्। समानं मूल्यनिर्धारकं स्थापयन् गणकयन्त्राणि योजयित्वा एतत् साधितम् अस्ति।
- **ब्रह्मगुप्तस्य उपविभाजनस्य विधिः** - यदा विभाजनं भवति तदा तान् समान-विभाजक-एककेन सह समतुल्य-विभाजनरूपेण परिवर्तयतु (यथा, समान-विभाजकः), ततः विभाजक-एककानाम् संख्यां विभाजयतु। समानं मूल्यनिर्धारकं स्थापयन् गणकयन्त्राणां व्यवकलनेन एतत् साधितम् अस्ति।